



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
Instituto de Física Gleb Wataghin

CLARA TEIXEIRA FIGUEIREDO

MECANISMOS E CONSEQUÊNCIAS DA GERAÇÃO DE MASSA  
DINÂMICA PARA O GLUON

CAMPINAS  
2016

CLARA TEIXEIRA FIGUEIREDO

MECANISMOS E CONSEQUÊNCIAS DA GERAÇÃO DE MASSA  
DINÂMICA PARA O GLUON

*Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto  
de Física Gleb Wataghin da Universidade Estadual  
de Campinas como parte dos requisitos exigidos  
para a obtenção do título de Mestra em Física.*

*Orientadora:* Arlene Cristina Aguilar

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VER-  
SÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA  
PELA ALUNA CLARA TEIXEIRA FIGUEI-  
REDO, E ORIENTADA PELA PROFA. DRA.  
ARLENE CRISTINA AGUILAR

---

CAMPINAS  
2016

**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s):** FAPESP, 2014/16247-8; CNPq, 147440/2014-9

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Física Gleb Wataghin  
Lucimeire de Oliveira Silva da Rocha - CRB 8/9174

F469m Figueiredo, Clara Teixeira, 1991-  
Mecanismos e consequências da geração de massa dinâmica para o glúon  
/ Clara Teixeira Figueiredo. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Arlene Cristina Aguilar.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Física Gleb Wataghin.

1. QCD não perturbativa. 2. Schwinger-Dyson, Equações de. 3. Geração de massa dinâmica. I. Aguilar, Arlene Cristina, 1977-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física Gleb Wataghin. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Mechanisms and consequences of dynamical mass generation for the gluon

**Palavras-chave em inglês:**

Non-perturbative QCD

Schwinger-Dyson equations

Dynamical mass generation

**Área de concentração:** Física

**Titulação:** Mestra em Física

**Banca examinadora:**

Arlene Cristina Aguilar [Orientador]

Adriano Antonio Natale

Marcio José Menon

**Data de defesa:** 02-09-2016

**Programa de Pós-Graduação:** Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE **CLARA TEIXEIRA FIGUEIREDO - RA 123161** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 02 / 09 / 2016.

**COMISSÃO JULGADORA:**

- Profª. Dra. Arlene Cristina Aguilar – Orientadora – DRCC/IFGW/UNICAMP
- Prof. Dr. Adriano Antonio Natale – IFT/UNESP
- Prof. Dr. Marcio José Menon – DRCC/IFGW/UNICAMP

**OBS.:** Informo que as assinaturas dos respectivos professores membros da banca constam na ata de defesa já juntada no processo vida acadêmica do aluno.

CAMPINAS  
2016

# Agradecimentos

Agradeço,

à Profa. Cristina os dois anos de dedicada orientação e os muitos ensinamentos ao longo desse período.

aos colegas de grupo mais próximos: Maurício e Jeiner pela troca de experiências.

aos professores do IFGW com os quais aprendi muito desde a graduação, em especial, aos professores Orlando e Márcio que acompanharam o desenvolvimento desse trabalho desde a qualificação.

ao professor Joannis (UV, Espanha) a recepção e dedicação em Valência.

aos membros da banca examinadora por se disporem a avaliar e contribuir para esse trabalho.

à agência FAPESP o apoio financeiro concedido através do projeto 2014/16247-8.

ao CNPq a bolsa concedida nos dois primeiros meses de mestrado.

ao IFGW/UNICAMP a estrutura oferecida aos estudantes.

à CAPES o portal de periódicos eletrônicos, que permite o acesso rápido e eficiente ao conhecimento científico.

aos amigos próximos a amizade e constante disposição em ajudar: Guillermo e Rene.

ao meu noivo e melhor amigo em todos os momentos difíceis, Paulo Henrique.

aos meus pais o amor incondicional e apoio em todas as áreas da vida.

ao meu irmão a convivência e companhia sempre.

a todos que de alguma forma contribuíram com a minha formação acadêmica e pessoal.

a Deus pelo refúgio e socorro sempre presentes.

# Resumo

Neste trabalho, descrevemos os mecanismos de geração de uma massa dinâmica para o gluon no regime não perturbativo da QCD. Além disso, analisamos o impacto que essa geração de massa do gluon aliada ao comportamento do ghost, que permanece não massivo no região não perturbativa, causa em outras funções de Green fundamentais da QCD. A partir das equações de Schwinger-Dyson, apresentamos um formalismo teórico generalizado para lidar com a geração de massa para o gluon em teorias de Yang-Mills. A construção central se baseia na ação combinada das identidades de Ward satisfeitas pelos vértices não perturbativos (dentro do esquema PT-BFM) e uma identidade especial, chamada identidade de seagull, nos diagramas que compõem a equação de Schwinger-Dyson do propagador de gluon. O resultado dessas considerações é que o gluon permanece rigorosamente não massivo, desde que os vértices não contenham polos. Quando tais polos são incorporados aos vértices da teoria, os termos se combinam de tal forma que a aniquilação total de divergências quadráticas permanece e, ao mesmo tempo, aparecem contribuições residuais que provocam a saturação do propagador de gluon no infravermelho profundo. Esses polos se comportam como excitações de estado ligado não massivas e podem ser estudados a partir das equações de Bethe-Salpeter. As análises realizadas previamente dentro desse contexto consideravam apenas a possibilidade de polo no vértice de três gluons, desprezando efeitos advindo de possíveis polos nos demais vértices. Aqui, nós obtemos a contribuição da presença de um polo no vértice gluon-ghost para a equação dinâmica que descreve a criação de tais polos. Por fim, nota-se que o fato do gluon ganhar uma massa dinâmica e o ghost permanecer não massivo impacta algumas das funções de Green da teoria, em particular o propagador de gluon e o vértice de três gluons. Assim, verificamos que o comportamento divergente dos loops de ghost induz simultaneamente um máximo no propagador de gluon e um mínimo em seu termo cinético. Além disso, esses loops provocam uma mudança de sinal e uma divergência negativa no infravermelho em um dos fatores de forma do vértice de três gluons, calculado em uma configuração cinemática especial.

Palavras-chave: QCD não perturbativa. Equações de Schwinger-Dyson. Geração de massa dinâmica.

# Abstract

In this work, we describe the mechanisms at work in the gluon dynamical mass generation in the nonperturbative regime of QCD. In addition, we obtain some effects of this mass generation allied to the behavior of the ghost, which remain massless in the nonperturbative region, in other fundamental Green's functions of QCD. From the Schwinger-Dyson equations, we present a general theoretical formalism to deal with mass generation in Yang-Mills theories. The central construction relies on the combined action of the Ward identities satisfied by the nonperturbative vertices (within the PT-BFM scheme) and a special identity, called seagull identity, in the diagrams that comprise the Schwinger-Dyson equation for the gluon propagator. The result of these considerations is that the gluon remains rigorously massless, given that the vertices do not contain poles. When such poles are incorporated to the vertices of the theory, the terms are combined in a way that the total annihilation of the quadratic divergences remains and, at the same time, residual contributions appear, which provoke the gluon propagator saturation in the deep infrared. These poles behave as massless bound-state excitations and can be studied using the Bethe-Salpeter equations. The analyses carried out previously within this context considered only the possibility of a pole in the three-gluon vertex, neglecting effects from possible poles in the remaining vertices. Here, we obtain the contribution of the presence of a pole in the gluon-ghost vertex for the dynamical equation that describes the creation of such poles. Finally, we note that the fact that the gluon gains a dynamical mass and the ghost remains massless impacts some of the Green's functions of the theory, in particular, the gluon propagator and the three-gluon vertex. Thus, we verify that the divergent behavior of the ghost loops induces simultaneously a maximum in the gluon propagator and a minimum in the kinetic term of this propagator. Besides, these loops generate a change in sign and a negative divergence in the infrared in one of the form factor of the three gluon vertex, calculated in a specific kinematic configuration.

Key-words: Nonperturbative QCD. Schwinger-Dyson Equations. Dynamical mass generation.

# Sumário

<b>Introdução Geral</b>	<b>10</b>
<b>1 QCD e equações de Schwinger-Dyson</b>	<b>13</b>
1.1 Cromodinâmica Quântica . . . . .	13
1.1.1 Regras de Feynman da QCD . . . . .	15
1.1.2 Liberdade Assintótica na QCD . . . . .	15
1.2 Equações de Schwinger-Dyson . . . . .	19
1.2.1 ESD do propagador de fóton na QED . . . . .	21
1.2.2 ESD do propagador de gluon na QCD . . . . .	23
<b>2 Equação de Schwinger-Dyson do gluon em PT-BFM</b>	<b>25</b>
2.1 Considerações gerais . . . . .	25
2.2 Background Field Method . . . . .	27
2.2.1 Novas funções de Green e regras de Feynman . . . . .	29
2.3 ESD do propagador de gluon em PT-BFM . . . . .	32
<b>3 Geração de massa para o gluon sem divergências quadráticas</b>	<b>35</b>
3.1 Considerações gerais . . . . .	35
3.2 Identidade de Seagull . . . . .	37
3.3 Identidades de Ward Abelianas dos vértices PT-BFM . . . . .	39
3.3.1 Identidades de Ward e fatores de forma dos vértices . . . . .	41
3.3.2 Aplicação na autoenergia do fóton em QED escalar . . . . .	42
3.4 A autoenergia do gluon na origem . . . . .	43
3.4.1 Renormalização . . . . .	48
3.5 Contornando o cancelamento de seagull . . . . .	49
3.5.1 Considerações Adicionais . . . . .	53
<b>4 Excitações de estado ligado não massivas</b>	<b>56</b>
4.1 Relação entre a massa dinâmica e os polos sem massa . . . . .	56
4.2 Sistema de equações dinâmicas dos polos . . . . .	60
4.3 Espaço Euclideano . . . . .	65
4.4 Solução numérica . . . . .	66



<b>5</b>	<b>Efeitos da divergência dos loops de ghost</b>	<b>69</b>
5.1	Considerações Gerais . . . . .	69
5.2	Toy Model . . . . .	70
5.3	Análise não perturbativa completa . . . . .	74
5.4	Toy Model com Quarks . . . . .	79
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>82</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>83</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>90</b>
<b>A</b>	<b>ESD para o propagador de gluon</b>	<b>90</b>
<b>B</b>	<b>Vértices de PT-BFM</b>	<b>94</b>
<b>C</b>	<b>Parte transversa do vértice <math>\tilde{\Gamma}_\mu</math></b>	<b>95</b>

# Introdução Geral

A Cromodinâmica Quântica (QCD) é a teoria que visa descrever as interações fortes em termos de campos fundamentais de quarks e gluons. É uma teoria de campos de gauge não-abeliana, renormalizável e assintoticamente livre no ultravioleta (UV) [1, 2]. Essa liberdade assintótica garante um acoplamento entre os campos de quarks e gluons muito pequeno para valores elevados de momento, o que permite a aplicação do tratamento perturbativo nessa região. As previsões da teoria nesse regime de energia têm se mostrado bem sucedidas quando testadas em diversos espalhamentos envolvendo partículas elementares [3].

Por outro lado, a região infravermelha (IR) da QCD, caracterizada por baixos momentos ou grandes distâncias, ainda apresenta diversos desafios teóricos. Nesse regime, a constante de acoplamento não é pequena o suficiente para que se possa aplicar os conhecidos métodos de teoria de perturbação, o que dificulta a descrição dessa região. Alguns dos fenômenos intrigantes que ocorrem no setor IR são, por exemplo, o confinamento e a geração dinâmica de massa.

Na última década, nosso entendimento sobre o setor IR da QCD avançou consideravelmente, devido aos estudos detalhados e sistemáticos das funções de Green (propagadores e vértices) fundamentais da teoria. Apesar dessas funções serem dependentes de gauge e de um ponto de renormalização,  $\mu$ , elas capturam as características essenciais da dinâmica perturbativa e não-perturbativa. Além disso, quando combinadas apropriadamente, geram observáveis físicos, como por exemplo: seções de choque, largura de decaimentos e massa dos hádrons.

As duas principais ferramentas não-perturbativas de primeiros princípios utilizadas nos estudos de QCD de baixas energias são (i) a *QCD na rede* [4–9] e (ii) as *Equações de Schwinger-Dyson* [10–18].

A QCD na rede é um método que parte da discretização do espaço-tempo, ou seja, o espaço-tempo contínuo é transformado em uma rede tetra-dimensional de pontos [19]. Os campos de matéria (campos de quarks) são definidos neste pontos, enquanto que os campos de interação (campos gluônicos) são definidos nos links que ligam um ponto a outro da rede. Durante essas simulações várias simetrias são comprometidas, mas eventu-

almente recuperadas no limite do contínuo. Contudo, a precisão dos resultados depende dos parâmetros de espaçamento e do volume da rede. Além disso, lidar com a grande disparidade de escalas físicas (como as diferentes escalas de massa dos quarks) apresenta algumas complicações.

Por outro lado, as chamadas Equações de Schwinger-Dyson (ESD) nos fornecem as equações de movimento das funções de Green da teoria. Em outras palavras, as ESDs são basicamente as equações de Euler-Lagrange de uma determinada teoria de campos. Cada função de Green de  $n$ -ponto da teoria tem a sua própria ESD, que, por sua vez, envolve outras funções de Green. Portanto, se fossemos capazes de escrever todas as equações possíveis, teríamos um conjunto infinito de equações integrais, todas acopladas entre si, formando uma torre infinita de ESDs [20–22].

Evidentemente, ambos métodos têm seus prós e contras. Se, por um lado, os principais limitantes dos estudos feitos pela QCD na rede são a extrapolação dos resultados numéricos para o limite do contínuo e a inclusão das interações dos quarks com valores de massa reais (que é extremamente dispendioso do ponto de vista computacional), por outro, a dificuldade fundamental em lidar com as ESDs está relacionada à necessidade de um esquema de truncamento auto-consistente das equações, *i.e.* um esquema que não comprometa as propriedades cruciais das quantidades estudadas [18, 23].

Importantes avanços foram obtidos nas últimas décadas graças a esses dois métodos. Neste trabalho, porém, focaremos nas ESDs e, portanto, precisamos lidar com as dificuldades de obtenção de um esquema de truncamento adequado. Para isso, utilizaremos o formalismo de Pinch Technique (PT) [18, 24, 25] e sua correspondência com o Background Field Method (BFM) [26]. A síntese desses dois métodos é conhecida na literatura como esquema PT-BFM [16, 17, 27].

Neste trabalho, estudamos os mecanismos que possibilitam a geração de uma massa dinâmica para o glúon a partir da ESD do propagador de glúon. Essa geração de massa explica a finitude IR do propagador de glúon, expressa no fato de que seu fator de forma escalar,  $\Delta(q^2)$ , satura em um valor finito (não nulo) na região de baixas energias. Esse comportamento foi primeiramente proposto por Cornwall [18] e posteriormente confirmado pelas simulações de QCD na rede de grandes volumes no gauge de Landau tanto para SU(2) [4, 5, 9, 28] quanto para SU(3) [6, 7, 29, 30]. Adicionalmente, simulações recentes de QCD na rede em gauges covariantes lineares ( $R_\xi$ ) [31] revelam que essa propriedade persiste para valores de  $\xi$  dentro do intervalo de  $[0, 0.5]$ . Além disso, a inclusão de um número pequeno de quarks dinâmicos (*unquenching*) produz uma supressão relativa do propagador de glúon, mas preserva a característica de saturação intacta [8].

Em seguida, analisamos alguns efeitos que ocorrem devido a geração de massa para o glúon aliada a um comportamento particular do propagador de ghost. Mais especificamente, enquanto o propagador de glúon é finito devido a geração de massa dinâmica, o propagador de ghost permanece com massa nula não perturbativamente, apresentando,

portanto, uma divergência no limite IR. Tal divergência impacta algumas das funções de Green da QCD, em particular o propagador de gluon e o vértice de três gluons [32].

Esta dissertação está dividida em seis capítulos. No Capítulo 1 apresentamos uma breve introdução à QCD, suas regras de Feynman e sua característica de liberdade assintótica. Nesse mesmo capítulo, explicamos como é possível derivar as ESDs de uma determinada teoria de campos e exemplificamos com a ESD do propagador de fóton na Eletrodinâmica Quântica (QED). Então, generalizamos esse resultado para a ESD do propagador de gluon na QCD. No Capítulo 2, introduzimos o método BFM, com suas novas funções de Green e regras de Feynman, e escrevemos a ESD de um novo propagador de gluon que aparece no esquema de PT-BFM. Apresentamos, ainda, a identidade que relaciona esse novo propagador ao propagador de gluon convencional. Passamos, então, para os Capítulos seguintes, que constituem a parte principal deste trabalho. No Capítulo 3, estudamos os mecanismos de geração de massa dinâmica para o gluon, iniciando com breves comentários sobre os dados da rede para o propagador de gluon no gauge de Landau. Introduzimos também o mecanismo de Schwinger, que permite a geração de uma massa para o bóson de determinada teoria desde que a dinâmica dessa teoria seja forte o suficiente. A partir daí, para uma análise mais profunda de como uma generalização do mecanismo de Schwinger pode ser aplicada na QCD, apresentamos a identidade de seagull e as identidades de Ward obedecidas pelos vértices do formalismo de PT-BFM. Com isso, partimos para a obtenção da autoenergia do gluon na origem e verificamos que o mecanismo de Schwinger é realizado na QCD a partir de polos nos vértices da teoria. No Capítulo 4, vemos que esses polos funcionam como excitações de estado ligado não massivas e os estudamos dentro do contexto de equações de Bethe-Salpeter (BSE). Para isso, consideramos a possibilidade de polo no vértice de três gluons e no vértice gluon-ghost. No Capítulo 5, então, analisamos os efeitos da divergência do propagador de ghost aliada a um propagador de gluon massivo em algumas funções de Green da QCD. Por fim, no Capítulo 6 concluímos com uma discussão sobre os resultados do trabalho. Adicionalmente, na seção A do Apêndice mostramos mais detalhadamente como é possível chegar à ESD para o propagador do gluon apresentada no Capítulo 1, já na seção B apresentamos as definições de vértices do formalismo de PT-BFM (utilizadas no Capítulo 3) e, por fim, na seção C estabelecemos a natureza subdominante da parte transversa do vértice gluon-ghost.

# QCD e equações de Schwinger-Dyson

Neste Capítulo apresentamos um breve resumo sobre a QCD e suas características principais. A QCD é uma teoria de gauge não abeliana que apresenta propriedades interessantes como o confinamento e a liberdade assintótica. A liberdade assintótica é fruto do comportamento da constante de acoplamento da teoria, que tende a zero para momentos muito elevados. Este trabalho foca no estudo da região IR e, portanto, não perturbativa da teoria. Para isso, utilizamos como ferramenta as ESDs, introduzidas nesse Capítulo. Começamos a derivação das ESDs com o exemplo mais simples de um campo escalar. Em seguida, demonstramos como chegar à ESD do propagador do fóton na QED, para depois generalizarmos para o caso da ESD do propagador de gluon na QCD, que será utilizada nos próximos capítulos.

## 1.1 Cromodinâmica Quântica

A QCD descreve as interações entre quarks e gluons, os constituintes fundamentais dos hádrons. Experimentalmente, temos comprovada a existência de seis sabores de quarks: up (u), down (d), strange (s), charm (c), bottom (b) e top (t). Eles possuem spin  $1/2$  e carga elétrica fracionária (em relação a carga do elétron), sendo  $+\frac{2}{3}e$  para os quarks u, c e t e  $-\frac{1}{3}e$  para d, s e b. Além disso, os quarks apresentam um número quântico não presente na QED, a chamada carga de cor, que existe em três tipos: vermelho, verde e azul. Na natureza, as cores se combinam de forma a gerar partículas observáveis sem cor (ou “brancas”), o que pode ocorrer a partir da combinação das três diferentes cores no caso dos bárions (compostos por três quarks) ou da combinação cor e anticor no caso dos mésons (compostos por um par quark-antiquark). Os glúons são as partículas de spin 1 mediadoras das interações e também carregam carga de cor, o que permite que eles interajam entre si, evidenciando o caráter não abeliano da QCD.

Por ser uma teoria de gauge não abeliana, a QCD apresenta algumas características

peculiares que não aparecem em teorias de gauge abelianas como a QED. Dentre elas, destaca-se o fenômeno de *confinamento*, ainda pouco entendido. De forma simplória, a propriedade de confinamento se manifesta na ausência de quarks livres, estando eles confinados em hádrons. Ao contrário do que ocorre na QED com o elétron, a força entre dois quarks não diminui quando a distância entre eles aumenta, sendo necessário uma energia infinita para separar os quarks de um hádron. Todavia, a compreensão de como ocorre o mecanismo de confinamento na QCD ainda é um problema em aberto.

Por outro lado, a *liberdade assintótica*, outra propriedade particular da QCD, garante que no limite UV a constante de acoplamento tende a zero e, portanto, os quarks se comportam como se estivessem praticamente livres. Assim, para altas energias é possível aplicar o conhecido tratamento perturbativo para lidar com as funções de Green da teoria.

Sabemos que as teorias quânticas de campo são descritas a partir de suas Lagrangianas. A Lagrangiana da QCD pode ser escrita como [33]

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)\psi + \bar{c}^a(-\partial^\mu D_\mu^{ac})c^c, \quad (1.1)$$

onde o tensor de força  $G_{\mu\nu}^a$  é dado por

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \quad (1.2)$$

e a derivada covariante  $D_\mu$  é definida como

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a \frac{\lambda^a}{2}, \quad (1.3)$$

sendo  $\xi$  o parâmetro de fixação de gauge,  $A_\mu^a$  o campo de gauge,  $c$  ( $\bar{c}$ ) o campo de ghost (antighost),  $\psi$  ( $\bar{\psi}$ ) o campo de matéria (antimatéria),  $m_q$  a massa do quark considerado,  $\gamma^\mu$  as matrizes gama e  $\lambda^a$  as matrizes de Gell-Mann geradoras do grupo de simetria SU(3). Tais matrizes obedecem às relações de comutação e normalização:

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2}\right] = if^{abc}\frac{\lambda^c}{2}, \quad \text{tr}(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab}, \quad (1.4)$$

onde  $f^{abc}$  é a constante de estrutura do grupo de transformações.

A Lagrangiana da Eq. (1.1) é invariante sob transformações de gauge global e local. Os campos se transformam localmente como:

$$A_\mu(x) \rightarrow U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) + \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^{-1}(x), \quad (1.5)$$

$$\psi \rightarrow U(x)\psi, \quad (1.6)$$

onde

$$U(x) = \exp \left[ i\theta^a(x) \frac{\lambda^a}{2} \right], \quad (1.7)$$

sendo  $\theta^a(x)$  os parâmetros de transformação dependentes do espaço-tempo do grupo de simetria  $SU(3)$ . No caso das transformações globais, temos

$$A_\mu(x) \rightarrow e^{i\alpha} A_\mu(x) e^{-i\alpha} = A_\mu(x), \quad (1.8)$$

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi, \quad (1.9)$$

onde  $\alpha$  é uma fase global constante.

### 1.1.1 Regras de Feynman da QCD

A partir da Lagrangiana da QCD, podemos obter as regras de Feynman da teoria. As expressões para os propagadores de quark, gluon e ghost são dadas na Fig. 1.1. Já nas Figs. 1.2 e 1.3 temos as expressões em nível de árvore para os vértices de interação da teoria: os vértices quark-gluon, gluon-ghost e de três e quatro gluons.




	$S(p) = \frac{i\delta^{ab}(\gamma^\mu p_\mu + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon},$
	$\Delta(k)_{\mu\nu} = -i\delta^{ab} \left[ g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \frac{1}{k^2 + i\epsilon},$
	$D(p) = \frac{i\delta^{ab}}{p^2 + i\epsilon}.$

Figura 1.1: Regras de Feynman para os propagadores de quark, gluon e ghost em nível de árvore.

Contudo, as regras de Feynman são válidas somente no limite em que a constante de acoplamento é fraca, ou seja, onde o tratamento perturbativo é adequado. Pode-se, então, calcular as correções quânticas dos propagadores e vértices da teoria ordem a ordem. Todavia, diferentemente da QED, essas expansões diagramáticas devem levar em conta os vértices gluônicos de autointeração (três e quatro gluons) e as interações gluon-ghost.

### 1.1.2 Liberdade Assintótica na QCD

A existência da chamada liberdade assintótica na QCD ocorre devido a expressão da função  $\beta$  da teoria. Essa função expressa a variação da constante de acoplamento renormalizada,  $g_R$ , conforme a escala de renormalização,  $\mu$ , cresce. O cálculo da função  $\beta$  da

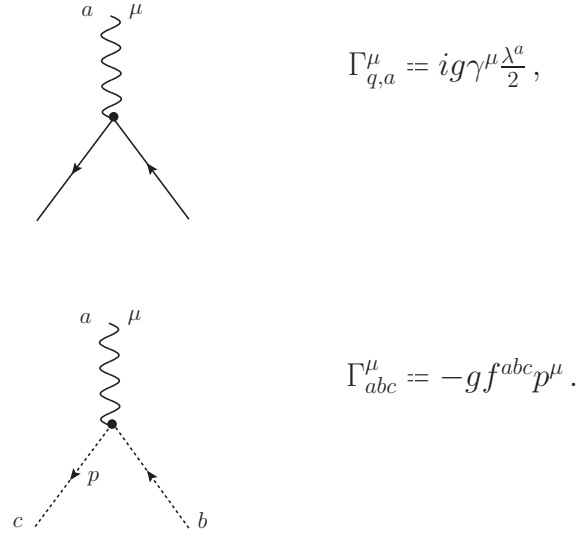


Figura 1.2: Regras de Feynman para os vértices de interação quark-gluon e gluon-ghost em nível de árvore.

QCD foi realizado pela primeira vez por Gross e Wilczek [1] e Politzer [2] simultaneamente. A partir desses cálculos, demonstrou-se que, em teorias de gauge não abelianas, o parâmetro de acoplamento tende a zero a medida em que a distância entre os quarks diminui, ou seja, quarks e gluons interagem fracamente a pequenas distâncias.

No grupo de renormalização, a função  $\beta$  é, então, escrita como

$$\beta(g_R) = \mu \frac{dg_R}{d\mu}. \quad (1.10)$$

Transformando a escala de momentos  $p \rightarrow \lambda p$ , sendo  $\lambda$  um fator de escala adimensional, pode-se definir uma nova escala de renormalização  $\mu/\lambda$ , de forma que

$$\beta(g_R) = \frac{\mu}{\lambda} \frac{dg_R}{d(\mu/\lambda)}. \quad (1.11)$$

Agora, considerando  $\mu$  um parâmetro fixo e  $g_R$  variável, escreve-se a equação acima como

$$\frac{dg_R}{dt} = \beta(g_R), \quad (1.12)$$

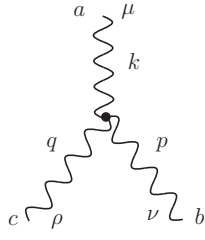
onde usamos

$$t = \ln \lambda. \quad (1.13)$$

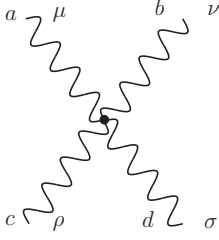
Resolvendo a equação diferencial (1.12), obtemos

$$t = \int_{g_0}^{g_R(t)} \frac{dg'_R}{\beta(g'_R)}, \quad (1.14)$$





$$\Gamma_{abc}^{\mu\nu\rho} = g f^{abc} [g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu],$$



$$\begin{aligned} \Gamma_{abcd}^{\mu\nu\rho\sigma} = & -ig^2 [f^{abc} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ & + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ & + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})]. \end{aligned}$$

Figura 1.3: Regras de Feynman para os vértices de autointeração gluônica em nível de árvore. No vértice de três gluons assume-se todos os momentos entrando.

onde  $g_0 = g_R(t=0)$ . Assim, o comportamento da escala de renormalização  $t$  depende da função  $\beta(g_R)$ .

Para obter o comportamento da constante de acoplamento, escolhemos a escala de momentos  $\lambda = Q^2/\mu^2$ , sendo  $\mu$  a escala de renormalização fixa e  $Q$  o momento em que queremos obter o valor do acoplamento. Em um loop, a função  $\beta(g_R)$  é dada por

$$\beta(g_R) = -\beta_0 g_R^3, \quad (1.15)$$

sendo

$$\beta_0 = \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{11}{3} C_A - \frac{2}{3} n_f \right), \quad (1.16)$$

onde  $C_A$  representa o autovalor de Casimir da representação adjunta e  $n_f$  o número de sabores de quark da teoria. Em uma teoria de gauge  $SU(N)$ ,  $C_A = N$ , de forma que em uma teoria do grupo  $SU(3)$ , como a QCD,  $C_A = 3$ . Substituindo a Eq. (1.15) na Eq. (1.14), encontramos

$$t = - \int_{g_0}^{g_R(t)} \frac{dg'_R}{\beta_0 g_R^3}, \quad (1.17)$$

de onde obtém-se que

$$t = \frac{1}{2\beta_0} \left( \frac{1}{g_R^2} - \frac{1}{g_0^2} \right). \quad (1.18)$$

Após algumas manipulações algébricas na Eq. (1.18), é possível chegar a

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(11C_A - 2n_f) \ln \left( \frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2} \right)}, \quad (1.19)$$

onde  $\alpha_s = g_R^2/4\pi$  e  $\Lambda_{QCD}$  é a escala da QCD, definida como

$$\ln \Lambda_{QCD}^2 = \ln \mu^2 - \frac{1}{\alpha_s(\mu^2)4\pi\beta_0}. \quad (1.20)$$

A Eq. (1.19) resulta no comportamento previsto na Fig. 1.4 [3], que está de acordo com os resultados experimentais.

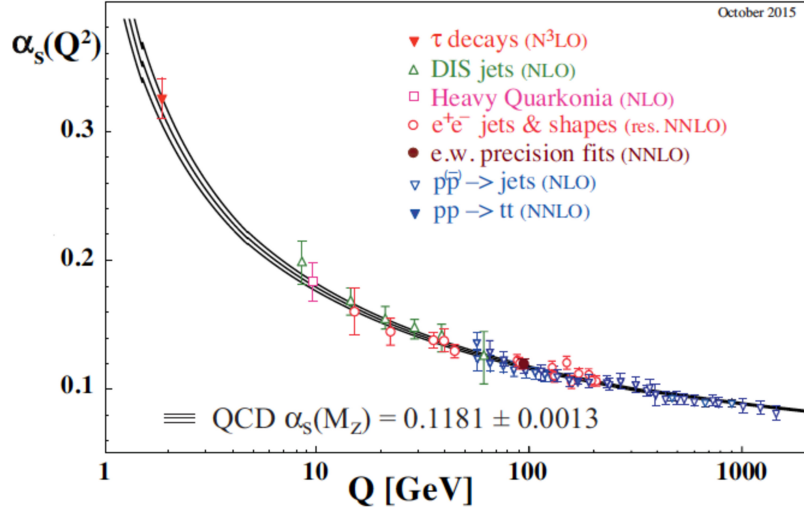


Figura 1.4: Resumo das medidas experimentais de  $\alpha_s$  como função da escala de energia  $Q$ .

A partir da Eq. (1.19), é possível concluir que, para um número pequeno de sabores de quarks (mais especificamente  $n_f \leq 16$ ), a constante de acoplamento tende a zero para valores elevados de momento, ou seja,  $\alpha_s(Q^2) \rightarrow 0$  quando  $Q^2 \rightarrow \infty$ . Esse é o fenômeno de liberdade assintótica característico da QCD, que afirma que os quarks estão praticamente livres para pequenas distâncias (limite de altas energias). Isso explica, por exemplo, porque os prótons em experimentos de espalhamento de energias muito altas se comportam aproximadamente como três partículas pontuais livres.

Note que quando  $Q^2 = \Lambda_{QCD}^2$ , o denominador da Eq. (1.19) se iguala a zero e, portanto, temos um polo neste ponto, o chamado *polo de Landau*. Isso indica que, para valores de momento  $Q \lesssim \Lambda_{QCD}$ , não podemos utilizar o tratamento perturbativo para descrever a dinâmica dos hádrons, já que a constante de acoplamento deixa de ser pequena, não podendo ser utilizada como parâmetro de perturbação. Tipicamente, o valor de  $\Lambda_{QCD}$  se encontra no intervalo de energias de 200 – 400 MeV, ou  $\sim 1$  fm em termos de distância (região confinante).

Portanto, para a região de baixos momentos, faz-se necessário o uso de ferramentas matemáticas especiais. Conforme mencionado anteriormente, uma das principais ferramentas de primeiros princípios utilizadas para a região não perturbativa da QCD são as ESDs.

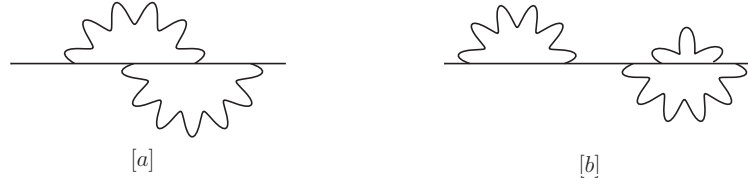


Figura 1.5: Exemplo de diagramas: [a] próprio e [b] impróprio.

## 1.2 Equações de Schwinger-Dyson

Podemos entender as ESDs como as equações de movimento que descrevem a dinâmica das funções de Green de  $n$  pontos da teoria. Tais equações formam um sistema infinito de equações integrais que acoplam todos os propagadores e vértices existentes na teoria em questão. Assim, não é possível resolver completamente as ESDs, sendo necessário realizar um truncamento desse sistema em determinado nível. Veremos uma forma autoconsistente de realizar esse truncamento através do formalismo PT-BFM no Capítulo 2. Nesta seção, focaremos na derivação das ESDs para uma teoria de campos quântica a partir do seu gerador funcional.

Inicialmente, sabemos que o gerador funcional de um campo escalar  $\phi$  é dado por

$$Z[J] = \int \mathcal{D}[\phi] \exp \left[ iS[\phi] + i \int d^4x J(x)\phi(x) \right], \quad (1.21)$$

onde  $S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(x)$  é a ação,  $\mathcal{L}(x)$  a Lagrangiana do campo escalar  $\phi$  e  $J(x)$  a fonte externa associada ao campo escalar. A medida de integração  $\mathcal{D}[\phi]$  é definida como

$$\mathcal{D}[\phi] \equiv \prod d\phi(x). \quad (1.22)$$

A partir do gerador funcional  $Z[J]$ , pode-se gerar dois tipos de diagramas de Feynman: *conectados* e *desconectados*.

Os gráficos *desconectados* são aqueles compostos por duas ou mais partes desconexas, enquanto os *conectados* possuem todas as suas partes conectadas por pelo menos uma linha. Os diagramas conectados podem ainda ser divididos em duas categorias: *impróprios* e *próprios*. Os *impróprios* são aqueles que podem ser divididos em dois diagramas através da remoção de uma linha, já os *próprios* não se separam através da remoção de uma única linha; a Fig. 1.5 exemplifica essa definição.

Ao utilizar o formalismo de integrais de caminho para o estudo de teoria quântica de campos, considera-se apenas os diagramas conectados. Para eliminar a contribuição dos gráficos desconectados, tomamos o logaritmo do gerador funcional de tal forma que

$$W[J] = -i \ln Z[J], \quad (1.23)$$

sendo  $W[J]$  o gerador funcional de gráficos conectados. Então, podemos obter uma função de Green de  $n$  pontos, derivando  $W[J]$  sucessivamente  $n$  vezes,

$$G_c(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J_1=\dots J_n=0}. \quad (1.24)$$

Para obter somente as contribuições de gráficos conectados próprios, devemos calcular a transformada de Legendre de  $W[J]$ , *i.e.*,

$$\Gamma[\phi] = W[J] - \int d^4x J(x)\phi(x), \quad (1.25)$$

que é o chamado gerador de gráficos conectados próprios. O campo  $\phi$  e a fonte externa  $J$  possuem uma relação não trivial entre si e, portanto, não são independentes. Calculando a derivada parcial da equação acima com respeito a  $J$  (mantendo  $\phi$  fixo) e com respeito a  $\phi$  (mantendo  $J$  fixo), obtemos

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \phi(x); \quad \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)} = -J(x). \quad (1.26)$$

A ESD é baseada na observação de que a integral funcional de uma derivada total é zero [34]:

$$\int \mathcal{D}[\phi] \frac{\delta}{\delta \phi} \equiv 0. \quad (1.27)$$

Em particular, aplicando a Eq. (1.27) no gerador funcional  $Z[J]$  de uma teoria de campos escalar apresentado na Eq. (1.21), temos

$$0 = \int \mathcal{D}[\phi] \frac{\delta}{\delta \phi} \exp \left\{ i \left( S[\phi] + \int dx J\phi \right) \right\} \quad (1.28)$$

$$= \int \mathcal{D}[\phi] i \left[ \frac{\delta S}{\delta \phi} + J \right] \exp \left\{ i \left( S[\phi] + \int dx J\phi \right) \right\}. \quad (1.29)$$

Então, podemos reescrever a expressão acima como

$$\left( \frac{\delta S}{\delta \phi} \left[ -i \frac{\delta}{\delta J} \right] + J \right) Z[J] = 0. \quad (1.30)$$

Essa é a relação de Schwinger-Dyson, que é independente de teoria de perturbação.

Agora, pode-se tomar um número arbitrário de derivadas da Eq. (1.30) com respeito aos campos e obter equações integrais envolvendo várias funções de Green. Por outro lado, ao expandir essas equações em série de potências da constante de acoplamento, reproduz-se a teoria de perturbação.

### 1.2.1 ESD do propagador de fóton na QED

Para compreender as ideias acima, exploremos a ESD para o propagador de fóton na QED. A ação da QED é dada por

$$S[A, \psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} A^\mu (\partial^2 g_{\mu\nu} - (1 - \xi^{-1}) \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu + \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu \right]. \quad (1.31)$$

Adicionalmente, temos o gerador funcional,

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}[u] \exp \left\{ i \left[ S[A, \psi, \bar{\psi}] + \int d^4x (J_\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta) \right] \right\}, \quad (1.32)$$

onde  $J_\mu$  é a fonte do campo  $A_\mu$ , enquanto que  $\eta$  e  $\bar{\eta}$  são as fontes grassmannianas dos campos fermiônicos  $\bar{\psi}$  e  $\psi$  respectivamente. Já a medida  $\mathcal{D}[u]$  é definida como

$$\mathcal{D}[u] = \mathcal{D}[A] \mathcal{D}[\bar{\psi}] \mathcal{D}[\psi]. \quad (1.33)$$

Contudo, estamos interessados somente nos diagramas próprios, logo devemos olhar para  $\Gamma[A, \psi, \bar{\psi}]$ , que é o gerador de diagramas próprios da QED. Para isso, devemos calcular a transformada de Legendre de  $W[J, \bar{\eta}, \eta]$ , dada por

$$\Gamma[A, \psi, \bar{\psi}] = W[J, \bar{\eta}, \eta] - \int d^4x (J_\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta). \quad (1.34)$$

Da Eq. (1.34), podemos obter as relações:

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu} = -J_\mu, \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}} = -\eta, \quad \frac{\delta W}{\delta J_\mu} = A_\mu, \quad \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} = \psi. \quad (1.35)$$

Como estamos interessados na ESD do propagador de fóton, devemos derivar a ação da Eq. (1.30) com relação ao campo de gauge  $A_\mu$ ,

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu} = [\partial^2 g_{\mu\nu} - (1 - \xi^{-1}) \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu - e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi. \quad (1.36)$$

Agora, lembrando que  $Z = e^{iW}$ , a expressão análoga a Eq. (1.30) é dada por

$$\left( \frac{\delta S}{\delta A_\mu} \left[ -i \frac{\delta}{\delta J_\nu}, -i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}, i \frac{\delta}{\delta \eta} \right] + J_\mu \right) e^{iW[J, \bar{\eta}, \eta]} = 0. \quad (1.37)$$

Assim, temos

$$J_\mu + [\partial^2 g_{\mu\nu} - (1 - \xi^{-1}) \partial_\mu \partial_\nu] \frac{\delta W}{\delta J_\nu} - e \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} \gamma_\mu \frac{\delta W}{\delta \eta} - e \frac{\delta}{\delta \eta} \left( \gamma_\mu \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} \right) = 0, \quad (1.38)$$

onde usamos as relações da Eq. (1.35).

Em seguida, devemos converter a Eq. (1.38), dada em função de  $W$ , em uma expressão para  $\Gamma$ . Utilizando novamente a Eq. (1.35), a equação acima pode ser reescrita como

$$\left. \frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu} \right|_{\bar{\psi}=\psi=0} = [\partial^2 g_{\mu\nu} - (1 - \xi^{-1}) \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu - e \text{Tr} \left[ \gamma_\mu \left( \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi \delta \bar{\psi}} \right)^{-1} \right], \quad (1.39)$$

onde utilizamos que

$$-g_{\alpha\beta} \delta^4(x, y) = \int d^4 z \frac{\delta^2 W}{\delta \eta_\alpha(x) \delta \bar{\eta}_\gamma(z)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi_\gamma(z) \delta \bar{\psi}_\beta(y)} \Big|_{\bar{\psi}=\psi=\bar{\eta}=\eta=0}. \quad (1.40)$$

Nota-se que o último termo da Eq (1.39) é proporcional ao propagador de elétron  $S(x, y)$ , definido como

$$S(x, y) = \left( \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \psi \delta \bar{\psi}} \right)^{-1}. \quad (1.41)$$

Por fim, para obter a ESD do propagador de fóton, definido como

$$(\Delta^{-1})_{\mu\nu} = \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A^\mu \delta A^\nu}, \quad (1.42)$$

devemos derivar a Eq. (1.39) com respeito a  $A^\nu$  novamente. Assim, obtemos a equação

$$\begin{aligned} (\Delta^{-1})_{\mu\nu} &= [\partial^2 g_{\mu\nu} - (1 - \xi^{-1}) \partial_\mu \partial_\nu] \delta^4(x - y) \\ &\quad + ie^2 \text{Tr} \int d^4 u d^4 v [\gamma^\mu S(x, u) \Lambda_\nu(y, u, v) S(v, x)], \end{aligned} \quad (1.43)$$

onde definimos o vértice elétron-fóton,

$$\left. \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A^\mu(x) \delta \psi(y) \delta \bar{\psi}(z)} \right|_{A=\psi=\bar{\psi}=0} = e \Lambda_\mu(x, y, z). \quad (1.44)$$

Para obter o resultado da Eq. (1.43), também utilizamos a fórmula para a derivada da matriz inversa

$$\frac{\delta M^{-1}}{\delta A_\mu} = -M^{-1} \frac{\delta}{\delta A_\mu} M M^{-1}, \quad (1.45)$$

com

$$M = \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\psi} \delta \psi}. \quad (1.46)$$

A Eq. (1.43) é, então, a ESD para o propagador de fóton e pode ser reescrita como

$$(\Delta^{-1})_{\mu\nu} = [\partial^2 g_{\mu\nu} - (1 - \xi^{-1}) \partial_\mu \partial_\nu] \delta^4(x - y) + \Pi_{\mu\nu}(x, y),$$

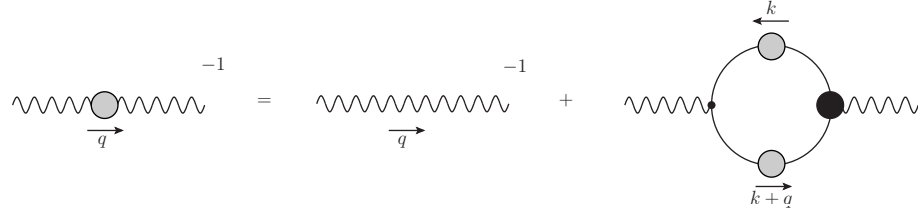


Figura 1.6: Representação diagramática da ESD do propagador de fóton. Círculos cinzas representam propagadores completos e círculos pretos vértices completos.

onde  $\Pi_{\mu\nu}$  é a autoenergia do fóton, dada por

$$\Pi_{\mu\nu}(x, y) = ie^2 \text{Tr} \int d^4u d^4v [\gamma^\mu S(x, u) \Lambda_\nu(y, u, v) S(v, x)] . \quad (1.47)$$

Finalmente, podemos passar a ESD do propagador de fóton do espaço de coordenadas para o espaço de momentos. Tomando a transformada de Fourier da autoenergia da Eq. (1.47), obtemos

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\gamma^\mu S(k) \Lambda_\nu(k, k+q) S(k+q)] . \quad (1.48)$$

Na Fig. 1.6, então, temos a representação diagramática da ESD do fóton no espaço de momentos.

### 1.2.2 ESD do propagador de gluon na QCD

A dificuldade em derivar a ESD para um campo de gauge na QCD é muito maior do que no caso da QED apresentado anteriormente. Isso se deve a natureza não Abelian da teoria, que gera diagramas adicionais, como os vértices de autointeração de três e quatro gluons, além da presença de campos de ghost. Naturalmente, temos ESDs para quarks, gluon e ghost e essas envolvem conhecimento sobre todos os vértices e propagadores da teoria.

O ponto de partida da derivação das ESDs da QCD é a Lagrangiana da teoria, apresentada na Eq. (1.1). Essa deve ser renormalizada de acordo com a prescrição:

$$\begin{aligned} g &= Z_g g_R, & \xi &= Z_\xi \xi_R, & \psi &= Z_2^{1/2} \psi_R \\ c^a &= Z_c^{1/2} c_R^a, & A_\mu^a &= Z_Q^{1/2} A_{\mu R}^a, & m &= Z_m m_R \end{aligned} \quad (1.49)$$

onde o subscrito  $R$  indica a quantidade renormalizada,  $Z_g$  é a constante de renormalização da constante de acoplamento  $g$ ,  $Z_\xi$  a do parâmetro de fixação de gauge  $\xi$ ,  $Z_2$  a do campo de quark (e seu propagador),  $Z_c$  a do propagador de ghost,  $Z_Q$  a do propagador de gluon e  $Z_m$  a da massa do quark. Utiliza-se, então, a Lagrangiana renormalizada da QCD para

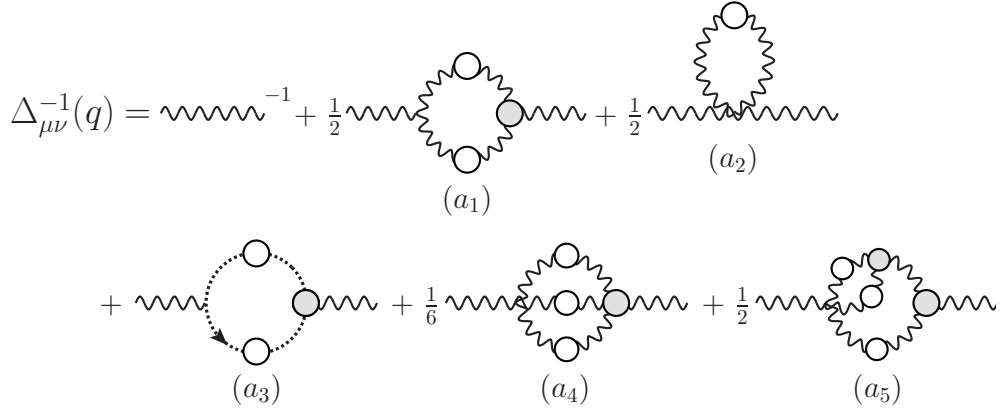


Figura 1.7: Representação diagramática da ESD do propagador de gluon. Círculos brancos representam propagadores completos e círculos cinzas vértices completos.

derivar a ESD do propagador de gluon de forma análoga ao caso do fóton. Os passos gerais para essa derivação encontram-se no Apêndice A.

A ESD do propagador de gluon no espaço de momentos, negligenciando a contribuição de loops de quark (aproximação *quenched*), é dada por

$$\begin{aligned}
[\Delta(p)]_{\mu\nu}^{-1} &= Z_Q [\Delta^{(0)}(p)]_{\mu\nu}^{-1} + Z_1 g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Gamma_\mu^{(0)}(p, k) D(p+k) \Gamma_\nu(k, p) D(p) \\
&+ Z_3 \frac{g^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Gamma_{\mu\rho\sigma}^{(0)}(p, k) \Delta^{\rho\rho'}(p+k) \Gamma_{\rho'\nu\sigma'}(k, p) \Delta^{\sigma\sigma'}(k) \\
&+ Z_4 \frac{g^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Gamma_{\mu\nu\rho\sigma}^{(0)} \Delta^{\rho\sigma}(k) \\
&+ Z_4 \frac{g^4}{6} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \Gamma_{\mu\rho\sigma\lambda}^{(0)} \Delta^{\rho\rho'}(k_2) \Delta^{\sigma\sigma'}(p+k_1+k_2) \Gamma_{\rho'\nu\lambda'\sigma'}(p, k_1, k_2) \Delta^{\lambda\lambda'}(k_1) \\
&+ Z_4 \frac{g^4}{2} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \Gamma_{\mu\rho\sigma\lambda}^{(0)} \Delta^{\rho\rho'}(p+k_1+k_2) \Delta^{\sigma\sigma'}(k_2) \Gamma_{\rho'\zeta\sigma'}(p+k_1+k_2, k_2) \\
&\quad \times \Delta^{\zeta\zeta'}(p+k_1) \Gamma_{\zeta'\nu\lambda'}(p+k_1, k_1) \Delta^{\lambda\lambda'}(k_1), \quad (1.50)
\end{aligned}$$

onde  $\Gamma_\mu$  é o vértice gluon-ghost,  $\Gamma_{\mu\nu\rho}$  o vértice de três gluons e  $\Gamma_{\mu\nu\rho\lambda}$  o vértice de quatro gluons, que são renormalizados segundo

$$\Gamma_R^\mu = Z_1 \Gamma^\mu; \quad \Gamma_R^{\mu\alpha\beta} = Z_3 \Gamma^{\mu\alpha\beta}; \quad \Gamma_R^{mnrs} = Z_4 \Gamma_{\mu\alpha\beta\nu}^{mnrs}, \quad (1.51)$$

onde  $Z_1$ ,  $Z_3$  e  $Z_4$  são as constantes de renormalização dos vértices gluon-ghost, três gluons e quatro gluons, respectivamente. A Eq. (1.50) está representada diagramaticamente na Fig. 1.7.



# Capítulo 2

## Equação de Schwinger-Dyson do gluon em PT-BFM

Uma das principais dificuldades para lidar com as ESDs está em conseguir um sistema de truncamento autoconsistente das equações. Para teorias de gauge, a maior dificuldade está relacionada ao fato de que tal truncamento pode violar as simetrias essenciais da teoria. Nesse Capítulo, então, estudamos brevemente o esquema PT-BFM, a partir do qual é possível realizar o truncamento das equações sem violar a simetria de gauge da teoria, embutida na transversalidade da autoenergia do gluon. Assim, apresentamos primeiramente o formalismo BFM, que surge a partir da adição de um campo de background no gerador funcional. Esse formalismo, e a sua síntese com a PT, apresenta características muito interessantes e úteis para o cálculo das ESDs da QCD.

### 2.1 Considerações gerais

Inicialmente, lembramos que em gauges covariantes o propagador de gluon pode ser escrito como

$$\Delta_{\mu\nu}(q^2) = -i \left[ P_{\mu\nu}(q) \Delta(q^2) + \xi \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right], \quad (2.1)$$

onde

$$P_{\mu\nu}(q) = g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / q^2 \quad (2.2)$$

é o projetor transverso ao momento  $q$  e  $\Delta(q^2)$  é definido em termos da autoenergia,  $\Pi_{\mu\nu}(q) = P_{\mu\nu}(q) \Pi(q^2)$ , através da relação

$$\Delta^{-1}(q^2) = q^2 + i \Pi(q^2). \quad (2.3)$$

A determinação da função escalar  $\Delta(q^2)$  em todas as ordens é dada pela ESD representada diagramaticamente na Fig. 1.7. Note que essa ESD envolve, além dos propagadores de ghost e gluon, os vértices completos de três e quatro gluons e o vértice completo gluon-ghost. Tais vértices, por sua vez, satisfazem as suas próprias ESDs, que envolvem outras funções de Green, tornando clara a necessidade de truncar essa série infinita. Um obstáculo a esse truncamento está relacionado ao fato de que a autoenergia do gluon deve permanecer transversa, *i.e.*  $q^\mu \Pi_{\mu\nu}(q) = 0$ , o que não ocorre para um truncamento casual da ESD da Fig. 1.7.

Para entender essa dificuldade, observe que, ao considerar apenas os diagramas  $(a_1)$  e  $(a_2)$  da Fig. 1.7 em um loop de teoria de perturbação, já violamos a transversalidade da autoenergia do gluon, pois a soma destes dois diagramas no espaço de Minkowski é dada por

$$\Pi_{\mu\nu}^{(1)}(q)|_{(a_1)} + \Pi_{\mu\nu}^{(1)}(q)|_{(a_2)} = \frac{ig^2 C_A}{16\pi^2} (84q_\mu q_\nu - 75g_{\mu\nu} q^2) \frac{1}{36} \ln \left( \frac{-q^2}{\mu^2} \right),$$

que nitidamente não é proporcional ao projetor transverso dado na Eq. (2.2). Em nível de um loop, sabemos que devemos adicionar a contribuição do diagrama de ghost  $(a_3)$ , dada por

$$\Pi_{\mu\nu}^{(1)}(q)|_{(a_3)} = -\frac{ig^2 C_A}{16\pi^2} (6q_\mu q_\nu + 3g_{\mu\nu} q^2) \frac{1}{36} \ln \left( \frac{-q^2}{\mu^2} \right).$$

Dessa forma, a transversalidade é preservada, pois a soma desses três diagramas resulta em

$$\Pi_{\mu\nu}^{(1)}(q)|_{(a_1)} + \Pi_{\mu\nu}^{(1)}(q)|_{(a_2)} + \Pi_{\mu\nu}^{(1)}(q)|_{(a_3)} = -\frac{ig^2 C_A}{16\pi^2} (g_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu) \frac{78}{36} \ln \left( \frac{-q^2}{\mu^2} \right). \quad (2.4)$$

Contudo, já em nível de dois loops, a soma desses três diagramas não produz um resultado transverso. O cálculo desses diagramas, em todas as ordens, nos leva a

$$q^\mu \Pi_{\mu\nu}(q) \Big|_{(a_1)+(a_2)+(a_3)} \neq 0. \quad (2.5)$$

Portanto, a transversalidade da autoenergia do gluon aparece somente após a inclusão de todos os diagramas (de um loop vestido e dois loops vestidos) da Fig. 1.7.

A formulação das ESDs baseada no formalismo PT-BFM [11, 27, 35] nos permite resolver o problema do truncamento. Essencialmente, esse formalismo possibilita a construção de uma nova ESD para o propagador do gluon, onde os diagramas vestidos estão organizados em subgrupos independentemente transversos, o que leva a um esquema de truncamento que preserva a transversalidade [11, 24, 27]. A razão para tal truncamento ser possível está relacionada ao fato de que no esquema PT-BFM surgem novas funções

de Green que satisfazem identidades de Ward (WI) do tipo Abelian, em contraposição às identidades de Slavnov-Taylor (STI) obedecidas pelas funções convencionais [24]. Para entender como isso ocorre, comecemos com uma breve introdução sobre o método BFM.

## 2.2 Background Field Method

O formalismo funcional pode ser generalizado conforme a prescrição de Faddeev e Popov [36], de maneira que o gerador funcional adquire a forma

$$Z[J] = \int D[Q] \det \left[ \frac{\delta G^a}{\delta \omega^b} \right] \exp \left\{ iS(Q) + i \int d^4x \left[ -\frac{1}{2\xi} (G^a)^2 + J_\mu^a Q^{a\mu} \right] \right\}, \quad (2.6)$$

onde  $Q_\mu^a$  é o campo de gauge e  $\omega^a$  é o parâmetro da transformação de gauge,

$$\delta Q_\mu^a = -f^{abc} \omega^b Q_\mu^c + \frac{1}{g} \partial_\mu \omega^a. \quad (2.7)$$

Além disso, o termo de fixação de gauge,  $G^a$ , foi extraído da definição da ação. O BFM é gerado a partir da mudança  $Q \rightarrow Q + A$  no gerador funcional, sendo  $Q$  o campo de gauge original e  $A$  um campo de background [26]. Assim, temos

$$\tilde{Z}[J, A] = \int D[Q] \det \left[ \frac{\delta G^a}{\delta \omega^b} \right] \exp \left\{ iS(Q + A) + i \int d^4x \left[ -\frac{1}{2\xi} (\tilde{G}^a)^2 + J_\mu^a Q^{a\mu} \right] \right\}. \quad (2.8)$$

Note que  $Q$  é a única variável de integração. Além disso, a ação  $S(Q + A)$  é invariante sob a transformação

$$\delta Q_\mu^a = -f^{abc} \omega^b (Q_\mu^c + A_\mu^c) + \frac{1}{g} \partial_\mu \omega^a. \quad (2.9)$$

Podemos definir ainda os demais geradores funcionais  $\tilde{W}$  e  $\tilde{\Gamma}$  como no Capítulo 1, de forma que

$$\tilde{W}[J, A] = -i \ln \tilde{Z}[J, A], \quad \tilde{\Gamma}[\tilde{Q}, A] = \tilde{W}[J, A] - \int d^4x J_\mu^a \tilde{Q}_\mu^a, \quad (2.10)$$

onde

$$\tilde{Q}_\mu^a = \frac{\delta \tilde{W}}{\delta J_\mu^a}. \quad (2.11)$$

Agora escolhemos um gauge especial, que quebra a invariância de gauge do campo  $Q$ , mas mantém a invariância em termos do campo de background  $A$ . Com isso, a condição de gauge é dada por

$$\tilde{G}^a(Q, A) = \partial^\mu Q_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b Q^{c\mu}. \quad (2.12)$$

Então, é possível mostrar que  $\tilde{Z}[J, A]$  e  $\tilde{W}[J, A]$  são invariantes sob as transformações [37, 38]

$$\delta A_\mu^a = -f^{abc}\omega^b A_\mu^c + \frac{1}{g}\partial_\mu\omega^a, \quad (2.13)$$

$$\delta J_\mu^a = -f^{abc}\omega^b J_\mu^c, \quad (2.14)$$

que são apenas transformações de gauge para o campo de background, como havíamos mencionado.

Nesse mesmo gauge de campo de background, temos que  $\tilde{\Gamma}[\tilde{Q}, A]$  é invariante sob

$$\delta A_\mu^a = -f^{abc}\omega^b A_\mu^c + \frac{1}{g}\partial_\mu\omega^a, \quad (2.15)$$

$$\delta \tilde{Q}_\mu^a = -f^{abc}\omega^b \tilde{Q}_\mu^c. \quad (2.16)$$

Em particular,  $\tilde{\Gamma}[0, A]$  deve ser um funcional de  $A$  explicitamente invariante de gauge, já que a Eq. (2.15) é apenas uma transformação de gauge convencional do campo de background e  $\delta \tilde{Q} = 0$  quando  $\tilde{Q} = 0$ . A quantidade  $\tilde{\Gamma}[0, A]$  é a ação efetiva utilizada nos cálculos de BFM. Temos, então, que as funções de Green próprias geradas pela diferenciação de  $\tilde{\Gamma}[0, A]$  satisfazem WI.

A relação entre o gerador funcional convencional e a ação de background,  $\tilde{\Gamma}[0, A]$ , é realizada pela mudança de variável  $Q \rightarrow Q - A$  na Eq. (2.8), que nos leva a

$$\tilde{Z}[J, A] = e^{-i \int d^4x J_\mu^a A^{a\mu}} Z[J], \quad (2.17)$$

onde  $Z[J]$  é calculado com o termo de fixação de gauge

$$G^a = \tilde{G}^a(Q - A, A) = \partial^\mu Q_\mu^a - \partial^\mu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b Q^{c\mu}. \quad (2.18)$$

A partir da Eq. (2.17), verifica-se que [26]

$$\tilde{\Gamma}[0, A] = \Gamma[A], \quad (2.19)$$

onde  $\Gamma[A]$  é o gerador funcional de diagramas próprios usual. Logo, a ação efetiva de BFM é apenas a ação efetiva usual em um gauge específico.

Dada a correspondência acima entre a ação efetiva de background e convencional, nota-se que os observáveis físicos calculados utilizando o formalismo de BFM são iguais aos obtidos com o formalismo convencional, apesar das funções de Green serem diferentes devido a escolha de gauge. Dessa maneira, podemos utilizar as funções de Green de BFM, que satisfazem as WI, ao invés das funções convencionais que obedecem as mais complicadas STI. Adicionalmente, o BFM está relacionado a técnica semelhante de PT [18,

$$\Delta_{\mu\nu}(q^2) = \text{wavy line} \text{---} \text{white circle} \text{---} \text{wavy line}$$

$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu}(q^2) = \text{wavy line} \text{---} \text{white circle} \text{---} \text{grey dot}$$

$$\hat{\Delta}_{\mu\nu}(q^2) = \text{grey dot} \text{---} \text{wavy line} \text{---} \text{white circle} \text{---} \text{grey dot}$$

Figura 2.1: Propagadores de gluon do formalismo PT-BFM. Os círculos brancos representam propagadores completos, enquanto os cinzas externos representam campos de gluon no background.

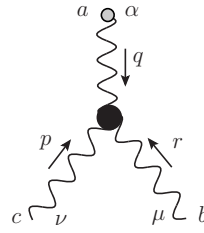


Figura 2.2: Vértice de três gluons,  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu}$ , com dois gluons quânticos e um de background, esse último representado pela perna que termina com um círculo cinza.

24, 25, 39, 40], de forma que a síntese dos dois métodos gera o esquema conhecido como PT-BFM [16, 17, 27].

### 2.2.1 Novas funções de Green e regras de Feynman

Como no formalismo PT-BFM distingue-se entre dois tipos de campos de gluon: quântico (Q) e background (B), surgem, então, novas funções de Green e regras de Feynman. Por exemplo, temos agora três tipos de propagadores de gluon, dependendo da natureza das pernas gluônicas externas [24]. O propagador convencional é o formado por dois gluons quânticos (QQ), mas podemos ter ainda o propagador QB (uma perna externa quântica e outra no background), denotado por  $\tilde{\Delta}_{\mu\nu}(q^2)$ , ou BB (as duas pernas externas no background), denotado por  $\hat{\Delta}_{\mu\nu}(q^2)$ . Na Fig 2.1, temos a representação diagramática desses propagadores, onde o círculo cinza externo representa um campo de gluon no background.

Adicionalmente aos novos propagadores gluônicos, temos também novos vértices na teoria, como o vértice de três gluons BQQ (com um gluon de background e dois quânticos),  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu}$ , da Fig. 2.2. Esses novos vértices com gluons de background satisfazem as identidades de Ward-Takahashi de uma teoria Abelianas, em contraposição as complicadas STIs não Abelianas obedecidas pelos vértices convencionais. Assim, o vértice de três

The figure shows two Feynman diagrams. The top diagram represents the two-point function  $\Lambda_{\mu\nu}(q)$  as the sum of two terms. The first term is a ghost loop with external indices  $\mu$  and  $\nu$ . The second term is a ghost loop with a gluon loop attached to it. The bottom diagram represents the kernel  $H_{\nu\mu}(q, p, r)$  as the sum of a bare term  $g_{\mu\nu}$  and a diagram with a ghost loop and a gluon loop, with external momenta  $q$ ,  $p$ , and  $r$  and indices  $\mu$  and  $\nu$ .

$$\Lambda_{\mu\nu}(q) = \text{ghost loop} + \text{ghost loop with gluon loop}$$

$$H_{\nu\mu}(q, p, r) = g_{\mu\nu} + \text{ghost loop with gluon loop}$$

Figura 2.3: No topo, a função de dois pontos  $\Lambda_{\mu\nu}(q)$ . Abaixo, a representação diagramática do kernel de espalhamento gluon-ghost,  $H_{\mu\nu}$ .

gluons convencional (QQQ), por exemplo, obedece a STI,

$$q^\alpha \Gamma_{\alpha\mu\nu}(q, r, p) = iF(q^2) [\Delta_{\sigma\nu}^{-1}(r^2) H_\mu^\sigma(q, r, p) - \Delta_{\sigma\mu}^{-1}(p^2) H_\nu^\sigma(q, r, p)] , \quad (2.20)$$

que envolve o propagador de gluon, o kernel de espalhamento gluon-ghost,  $H(q, r, p)$ , cuja representação diagramática é dada na Fig. 2.3, e a função de dressing de ghost,  $F(q^2)$ , dada a partir da relação

$$D(q^2) = i \frac{F(q^2)}{q^2} , \quad (2.21)$$

onde  $D(q^2)$  é o propagador de ghost; note que em nível de árvore  $F(q^2) = 1$ . Já o vértice  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu}$  da Fig. 2.2 obedece a uma identidade do tipo Abelianana,

$$q^\alpha \tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu}(q, r, p) = i[\Delta_{\mu\nu}^{-1}(r^2) - \Delta_{\mu\nu}^{-1}(p^2)] , \quad (2.22)$$

que envolve somente os propagadores de gluon convencionais.

Como, devido aos campos gluônicos de background, aparecem novos vértices na teoria, temos novas regras de Feynman para esses vértices [26], apresentadas na Fig. 2.4, onde omitimos a regra de Feynman para o vértice de quatro gluons BQQQ, pois em nível de árvore é igual ao vértice de quatro gluons convencional.

As novas funções de Green do formalismo de PT-BFM se relacionam com as funções convencionais a partir das identidades Background-Quântico (BQI) [41, 42]. Em particular, os novos propagadores de gluon possuem as seguintes BQIs:

$$\tilde{\Delta}^{-1}(q^2) = [1 + G(q^2)] \Delta^{-1}(q^2) , \quad (2.23)$$

$$\hat{\Delta}^{-1}(q^2) = [1 + G(q^2)]^2 \Delta^{-1}(q^2) , \quad (2.24)$$

onde  $G(q^2)$  é uma função auxiliar do formalismo de PT-BFM.

A função auxiliar  $G(q^2)$  é o termo escalar que multiplica  $g_{\mu\nu}$  na decomposição de

	$gf^{amn} \left[ g_{\mu\nu}(k_1 - k_2)_\alpha + g_{\alpha\nu}(k_2 - q + \frac{1}{\xi}k_1)_\mu + g_{\alpha\mu}(q - k_1 - \frac{1}{\xi}k_2)_\nu \right]$	$i\Gamma_{\hat{A}_\alpha^a \hat{A}_\mu^m \hat{A}_\nu^n}(k_1, k_2)$
	$gf^{amn}(k_1 + k_2)_\alpha$	$i\Gamma_{c^n \hat{A}_\alpha^a \bar{c}^m}(q, -k_1)$
	$-ig^2 \left[ f^{mse} f^{ern} (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} + \frac{1}{\xi}g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) + f^{mne} f^{esr} (g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - \frac{1}{\xi}g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}) + f^{mre} f^{esn} (g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}) \right]$	$\Gamma_{\hat{A}_\mu^m \hat{A}_\nu^n \hat{A}_\rho^r \hat{A}_\sigma^s}(k_2, p_2, p_1)$
	$-ig^2 g_{\alpha\rho} f^{mae} f^{ern}$	$\Gamma_{c^n \hat{A}_\alpha^a \hat{A}_\rho^r \bar{c}^m}(q, k_3, -k_1)$
	$-ig^2 g_{\alpha\rho} (f^{mae} f^{ern} + f^{mre} f^{ean})$	$\Gamma_{c^n \hat{A}_\alpha^a \hat{A}_\rho^r \bar{c}^m}(q, k_3, -k_1)$

Figura 2.4: Regras de Feynman para os novos vértices do formalismo PT-BFM.

Lorentz de uma função de Green especial  $\Lambda_{\mu\nu}(q)$ , representada no topo da Fig. 2.3,

$$\Lambda_{\mu\nu}(q) = g_{\mu\nu}G(q^2) + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}L(q^2) \quad (2.25)$$

Essa função  $\Lambda_{\mu\nu}(q)$  é dada por

$$\Lambda_{\mu\nu}(q) = -ig^2 C_A \int_k D(q-k) \Delta_\mu^\sigma(k) H_{\nu\sigma}(-q, q-k, k), \quad (2.26)$$

onde, assim como antes,  $H_{\mu\nu}$  é o kernel ilustrado na parte inferior da Fig. 2.3. Adicionalmente, a integral é definida em regularização dimensional,

$$\int_k \equiv \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}, \quad (2.27)$$

sendo  $d$  a dimensão do espaço-tempo.

A função  $G(q^2)$  tem sido estudada detalhadamente e, no gauge de Landau, temos a relação [43]

$$F^{-1}(q^2) = 1 + G(q^2) + L(q^2). \quad (2.28)$$

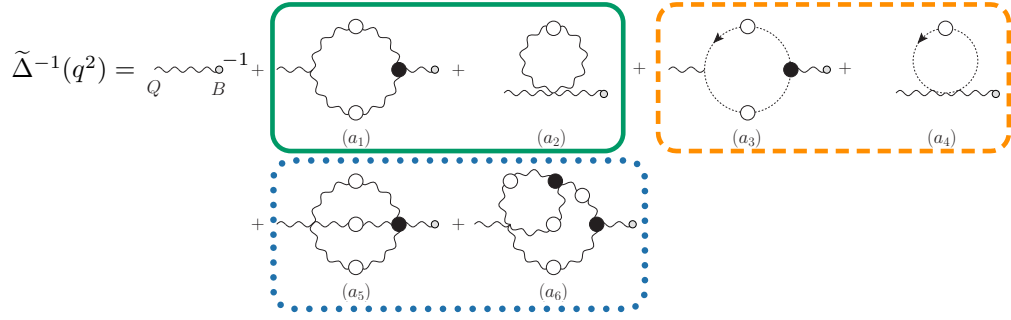


Figura 2.5: A ESD para o propagador do gluon QB,  $\tilde{\Delta}_{\mu\nu}(q)$ , dentro do formalismo PT-BFM sem a inclusão dos campos de quarks.

Contudo, para propósitos práticos, muitas vezes utiliza-se a relação aproximada [43]

$$1 + G(q^2) \approx F^{-1}(q^2), \quad (2.29)$$

que se torna exata tanto no IR profundo quanto no UV em 3 e 4 dimensões [43–46], pois a função  $L(q^2)$  é nula em ambos limites.

Por fim, é importante ressaltar que os gluons de background devem aparecer somente nas pernas externas dos diagramas e nunca dentro de um loop de integração.

## 2.3 ESD do propagador de gluon em PT-BFM

Na Fig. 2.5, temos a ESD para o propagador do gluon com uma perna quântica e outra background (QB) na aproximação quenched [16]. É possível mostrar que [27, 47]

$$q^\mu \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(q) \Big|_{(a_1)+(a_2)} = q^\mu \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(q) \Big|_{(a_3)+(a_4)} = q^\mu \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(q) \Big|_{(a_5)+(a_6)} = 0. \quad (2.30)$$

Assim, a transversalidade é forçada separadamente para os loops de gluon e ghost e ordem a ordem na expansão de *loops vestidos*.

Para verificar a transversalidade desses grupos de diagramas, deve-se explorar as identidades de Takahashi obedecidas pelos vértices da teoria. Para exemplo, provaremos aqui a transversalidade do grupo de diagramas gluônicos de 1-loop vestido, *i.e.* a soma dos diagramas  $(a_1)$  e  $(a_2)$  da Fig. 2.5.

A identidade de Takahashi satisfeita pelo vértice de três gluons  $\tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta}$  foi dada na Eq. (2.22). Agora, considerando o diagrama  $(a_1)$  e contraindo com o momento externo



do gluon de background, obtemos

$$\begin{aligned} q^\nu \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{ab} \Big|_{(a_1)} &= \frac{1}{2} \int_k \Gamma_{\mu\alpha\beta}^{(0)aeex} \Delta_{ee'}^{\alpha\rho}(k) \left[ q^\nu \tilde{\Gamma}_{\nu\rho\sigma}^{be'x'} \right] \Delta_{xx'}^{\beta\sigma}(k+q) \\ &= \frac{1}{2} \int_k \Gamma_{\mu\alpha\beta}^{(0)aeex} \Delta_{ee'}^{\alpha\rho}(k) g f^{be'x'} \left[ \Delta_{\rho\sigma}^{-1}(k+q) - \Delta_{\rho\sigma}^{-1}(k) \right] \Delta_{xx'}^{\beta\sigma}(k+q), \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde na segunda linha utilizamos a Eq. (2.22). Fazendo uso da regra de Feynman para o vértice de três gluons convencional em nível de árvore (Fig. 1.3) e omitindo os índices de cor, temos

$$\begin{aligned} q^\nu \tilde{\Pi}_{\mu\nu} \Big|_{(a_1)} &= \frac{1}{2} g^2 C_A \int_k [g_{\alpha\beta}(2k+q)_\mu + g_{\beta\mu}(-k-2q)_\alpha + g_{\mu\alpha}(q-k)_\beta] \\ &\quad \times [\Delta^{\alpha\beta}(k) - \Delta^{\alpha\beta}(k+q)]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Contraindo os índices,

$$\begin{aligned} q^\nu \tilde{\Pi}_{\mu\nu} \Big|_{(a_1)} &= \frac{1}{2} g^2 C_A \int_k \{ (2k+q)_\mu [\Delta_\alpha^\alpha(k) - \Delta_\alpha^\alpha(k+q)] \\ &\quad - (2k+q)_\alpha [\Delta_\mu^\alpha(k) - \Delta_\mu^\alpha(k+q)] \}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Após algumas manipulações na expressão acima, é possível obter

$$q^\nu \tilde{\Pi}_{\mu\nu} \Big|_{(a_1)} = C_A g^2 \int_k [q_\mu \Delta_\alpha^\alpha(k) - q_\alpha \Delta_\mu^\alpha(k)]. \quad (2.34)$$

Por outro lado, ao contrairmos a expressão matemática do diagrama  $(a_2)$  com o momento  $q^\nu$ , encontramos diretamente

$$\begin{aligned} q^\nu \tilde{\Pi}_{\mu\nu} \Big|_{(a_2)} &= \frac{1}{2} q^\nu \int_k \tilde{\Gamma}_{\mu\nu\alpha\beta}^{(0)} \Delta^{\alpha\beta}(k) \\ &= -C_A g^2 \int_k [q_\mu \Delta_\alpha^\alpha(k) - q_\alpha \Delta_\mu^\alpha(k)]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Aqui, utilizamos a regra de Feynman para o vértice BQQQ em nível de árvore, que é idêntica a do vértice de quatro gluons convencional. Com isso, fica provada a transversalidade do primeiro grupo de diagramas da Fig. 2.5, *i.e.*,

$$q^\nu \hat{\Pi}_{\mu\nu}^{ab} \Big|_{(a_1)+(a_2)} = 0. \quad (2.36)$$

Para comprovar a transversalidade dos outros dois blocos de diagrama, basta aplicar o mesmo processo, utilizando as identidades de Ward-Takahashi envolvidas. Como resultado, podemos truncar a ESD do propagador de gluon sem violar a simetria de gauge da teoria (embutida na transversalidade da autoenergia do gluon), desde que consideremos

todos os diagramas dentro de determinado bloco transversal. Evidentemente, isso não significa que as contribuições dos blocos de diagramas negligenciados no truncamento em questão sejam necessariamente pequenas, mas ao menos a invariância de gauge é preservada, já que a condição de transversalidade é satisfeita.

Finalmente, fazendo  $\xi = 0$  na Eq. (2.1), temos que o propagador de gluon convencional no gauge de Landau é dado por

$$\Delta_{\mu\nu} = -iP_{\mu\nu}(q)\Delta(q^2). \quad (2.37)$$

Dessa forma, obtemos a relação entre os diagramas  $(a_i)$  da Fig. 2.5 e o propagador de gluon convencional,

$$\Delta^{-1}(q^2)P_{\mu\nu}(q) = \frac{q^2P_{\mu\nu}(q) + i\sum_{i=1}^6(a_i)_{\mu\nu}}{1 + G(q^2)}, \quad (2.38)$$

onde utilizamos a BQI da Eq. (2.23).

# Capítulo 3

## Geração de massa para o gluon sem divergências quadráticas

Este capítulo, juntamente com o Capítulo 4, constitui a parte central deste trabalho. Nele, apresentamos os principais aspectos da geração de uma massa dinâmica para o gluon. Para isso, introduzimos o mecanismo de Schwinger, que permite a geração de uma massa para o bóson da teoria, mesmo ele sendo não massivo em nível da Lagrangiana fundamental. Em QCD, o mecanismo de Schwinger é integrado à ESD do propagador de gluon através da estrutura dos vértices. Porém, a geração de massa gluônica é afligida pela aparição de integrais com divergências quadráticas. A resolução para esse problema se dá a partir de uma identidade característica, válida em regularização dimensional. Aqui, derivamos essa identidade e a aplicamos juntamente com as WIs abelianas obedecidas pelos vértices do formalismo de PT-BFM, de forma a obter o inverso do propagador de gluon em transferência de momento nula. Esses nossos resultados foram publicados na Ref. [48].

### 3.1 Considerações gerais

Um dos fenômenos importantes que ocorrem na região não-perturbativa da QCD é a geração dinâmica de massa, que acontece tanto para os campos de quark quanto para os de gluon. Neste trabalho, vamos nos concentrar nos aspectos principais da geração de massa para o gluon. Para isso, o passo inicial é estudar o comportamento do propagador de gluon na região não perturbativa da QCD. A ideia de que os gluons adquirem uma massa dinâmica dependente do momento devido às suas autointerações foi originalmente proposta no início dos anos 1980s [18, 49, 50] e sua validade foi testada em uma série de modelos fenomenológicos [51–53], mas somente ganhou força recentemente com o acúmulo de evidências advindas de simulações de redes de grandes volumes, tanto para

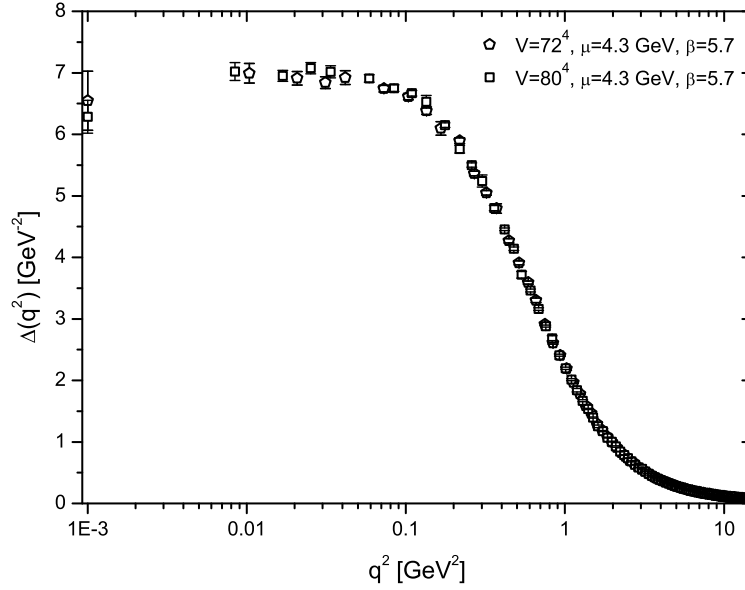


Figura 3.1: Dados da rede para o propagador de gluon no gauge de Landau. Nota-se a saturação no IR profundo, *i.e.*  $\Delta(0) = \text{cte}$ .

SU(3) [6, 7, 29, 30] quanto para SU(2) [4, 5, 9, 28]. Os dados de QCD na rede estabelecem que o propagador de gluon no gauge de Landau satura no IR profundo, conforme observado na Fig. 3.1 [6], o que corresponde a um sinal inequívoco de geração de massa gluônica [11]. Recentemente, simulações da rede em gauges covariantes lineares revelam que tal saturação não é exclusiva ao gauge de Landau, persistindo para valores de  $\xi$  no intervalo  $[0, 0.5]$  [31]. Além disso, a inclusão de um número pequeno de quarks dinâmicos produz uma supressão no propagador de gluon, mas preserva a saturação existente [8].

No caso de um propagador de gluon finito no IR, a função escalar  $\Delta(q^2)$  pode ser decomposta no espaço euclidiano como

$$\Delta^{-1}(q^2) = q^2 J(q^2) + m^2(q^2), \quad (3.1)$$

onde  $J(q^2)$  corresponde a um termo cinético e  $m^2(q^2)$  é uma massa dinamicamente gerada para o gluon (dependente do momento) [54, 55]. Assim, a saturação do propagador da rede é explicada através da geração dinâmica de massa do gluon, de forma que

$$\Delta^{-1}(0) = m^2(0). \quad (3.2)$$

Para ver como essa massa pode ser gerada, consideremos primeiramente a chamada Lagrangiana de Yang-Mills, que é obtida quando desprezamos os campos de quark na

Lagrangiana da QCD que foi definida na Eq. (1.1), ou seja,

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}G_a^{\mu\nu}G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 + \bar{c}^a(-\partial^\mu D_\mu^{ac})c^c. \quad (3.3)$$

Sabemos que o mecanismo de geração de massa para o glunon deve ocorrer sem modificação na lagrangiana acima, pois essa é invariante de gauge e a inserção de um termo de massa na forma  $m^2 A_\mu^2$  quebraria tal invariância, sendo, portanto, proibida.

A resolução para esse problema se dá pela generalização do bem conhecido mecanismo de Schwinger [56, 57]. Segundo Schwinger, a invariância de gauge de um campo vetorial (campo de gluons) não implica necessariamente em massa nula para a partícula associada, desde que a dinâmica da teoria seja forte o suficiente para produzir tal massa. A observação fundamental de Schwinger foi que, se a polarização do vácuo dos bósons de gauge adquirir um polo em transferência de momento nula, a partícula associada se torna massiva, mesmo que a simetria de gauge proíba uma massa em nível da Lagrangiana fundamental.

Para entender a proposição de Schwinger mais claramente, considere o propagador de glunon em gauges covariantes,  $\Delta_{\mu\nu}(q)$ , da Eq. (2.1). Vimos, na Eq. (2.3), que o fator escalar,  $\Delta(q^2)$ , é expresso em termos da autoenergia do glunon,  $\Pi(q^2)$ , da seguinte forma

$$\Delta^{-1}(q^2) = q^2 + i\Pi(q^2). \quad (3.4)$$

Em geral, define-se a polarização do vácuo sem dimensão, denotada por  $\mathbf{\Pi}(q^2)$ , como  $\Pi(q^2) = q^2 \mathbf{\Pi}(q^2)$ . Assim, podemos escrever

$$\Delta^{-1}(q^2) = q^2[1 + \mathbf{\Pi}(q^2)]. \quad (3.5)$$

Logo, se  $\mathbf{\Pi}(q^2)$  possuir um polo em  $q^2 = 0$  com resíduo positivo  $m^2$ , *i.e.*  $\mathbf{\Pi}(q^2) = m^2/q^2$ , então (no espaço Euclideano)

$$\Delta^{-1}(q^2) = q^2 + m^2. \quad (3.6)$$

Portanto, o propagador se torna massivo,  $\Delta^{-1}(0) = m^2$ , apesar de possuir massa nula em nível da Lagrangiana da Eq. (3.3).

## 3.2 Identidade de Seagull

Do ponto de vista teórico, a geração de uma massa dinâmica para o glunon apresenta complicações devido a aparição de divergências quadráticas, na forma

$$\Delta^{-1}(0) = c_1 \int_k \Delta(k) + c_2 \int_k k^2 \Delta^2(k), \quad (3.7)$$

que são típicas dos diagramas  $(a_1)$  e  $(a_2)$  da Fig. 2.5. Em particular, o diagrama  $(a_2)$  é denominado diagrama seagull, devido a sua forma lembrar uma gaivota estilizada. Como esse tipo de divergência quadrática aparece nesse tipo de diagrama, denominamo-la divergência seagull. O problema da presença de tais integrais divergentes reside no fato de que elas precisam ser regularizadas, porém os processos de regularização empregados na literatura não fornecem resultados satisfatórios do ponto de vista teórico, pois apresentam ambiguidade [11].

Todavia, é possível eliminar este problema através da chamada *identidade de seagull*. Para derivá-la, primeiro considere a classe de funções vetoriais

$$\mathcal{F}_\mu(k) = f(k^2)k_\mu, \quad (3.8)$$

com  $f(k^2)$  uma função escalar arbitrária. Como  $\mathcal{F}_\mu(-k) = -\mathcal{F}_\mu(k)$ , temos que

$$\int_k \mathcal{F}_\mu(k) = 0. \quad (3.9)$$

Assumamos agora que a função  $f(k^2)$  se anula rapidamente quando  $k^2 \rightarrow \infty$ , de forma que a integral (em coordenadas esféricas, com  $y = k^2$ )

$$\int_k f(k^2) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty dy y^{\frac{d}{2}-1} f(y) \quad (3.10)$$

convirja para valores positivos de  $d$  abaixo de um certo valor  $d^*$ . Dessa maneira, a integral é bem definida dentro do intervalo  $(0, d^*)$  e pode ser continuada analiticamente fora desse intervalo.

Devido à propriedade de invariância translacional da regularização dimensional, podemos deslocar o argumento da função (3.8) por um momento arbitrário  $q$  sem comprometer o resultado da Eq. (3.9). Expandindo em torno de  $q = 0$ , então, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\mu(q+k) &= \mathcal{F}_\mu(k) + q^\nu \left\{ \frac{\partial}{\partial q^\nu} \mathcal{F}_\mu(q+k) \right\}_{q=0} + \mathcal{O}(q^2) \\ &= \mathcal{F}_\mu(k) + q^\nu \frac{\partial \mathcal{F}_\mu(k)}{\partial k^\nu} + \mathcal{O}(q^2). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Em concordância com Eq. (3.9), ao integrar ambos os lados da expansão acima, o resultado deve ser nulo ordem a ordem, de forma que

$$q^\nu \int_k \frac{\partial \mathcal{F}_\mu(k)}{\partial k^\nu} = 0. \quad (3.12)$$

Dado que a integral possui dois índices de Lorentz livres e nenhuma escala de momento, ela somente pode ser proporcional ao tensor  $g_{\mu\nu}$ . Adicionalmente, como  $q$  é arbitrário,

conclui-se que a Eq. (3.12) é satisfeita através da identidade de seagull [48],

$$\int_k \frac{\partial \mathcal{F}_\mu(k)}{\partial k^\mu} = 0. \quad (3.13)$$

Tal identidade foi originalmente escrita como [58]

$$\int_k k^2 \frac{\partial f(k^2)}{\partial k^2} + \frac{d}{2} \int_k f(k^2) = 0, \quad (3.14)$$

o que pode ser obtido utilizando a relação

$$\frac{\partial f(k^2)}{\partial k^\mu} = 2k_\mu \frac{\partial f(k^2)}{\partial k^2} \quad (3.15)$$

na Eq. (3.13).

### 3.3 Identidades de Ward Abelianas dos vértices PT-BFM

Vimos na Fig. 2.5 a ESD para o propagador de gluon QB, os vértices aparecendo nesses diagramas são denotados por  $\tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta}$  ( $BQQ$ ),  $\tilde{\Gamma}_\alpha$  ( $B\bar{c}c$ ) e  $\tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta\gamma}^{abc}$  ( $BQQQ$ ). Sabemos que tais vértices satisfazem identidades de Takahashi, especificamente,

$$\begin{aligned} q^\mu \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta}(q, r, p) &= i\Delta_{\alpha\beta}^{-1}(r) - i\Delta_{\alpha\beta}^{-1}(p), \\ q^\mu \tilde{\Gamma}_\mu(q, r, -p) &= D^{-1}(q+r) - D^{-1}(r), \\ q^\mu \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta\gamma}^{mnrs}(q, r, p, t) &= f^{mse} f^{ern} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}(r, p, q+t) + f^{mne} f^{esr} \Gamma_{\beta\gamma\alpha}(p, t, q+r) \\ &\quad + f^{mre} f^{ens} \Gamma_{\gamma\alpha\beta}(t, r, q+p), \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde os vértices  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$  aparecendo no lado direito da última equação são os vértices de três gluons convencionais ( $QQQ$ ).

Estamos interessados no comportamento de  $\Delta(0)$ , ou, dado a Eq. (2.23),  $\tilde{\Delta}(0)$ . Assim, as STIs relevantes aqui são aquelas obtidas a partir da determinação dos limites das identidades da Eq. (3.16) quando o momento  $q$  do gluon externo tende a zero. Para isso, utiliza-se a expansão de Taylor de uma função  $f(q, r, p)$  em torno de  $q = 0$  (e  $p = -r$ ), dada por

$$f(q, r, p) = f(0, r, -r) + q^\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial q^\mu} f(q, r, p) \right\}_{q=0} + \mathcal{O}(q^2), \quad (3.17)$$

onde qualquer possível estrutura de Lorentz ou de cor da função foi suprimida.

Para entender a ideia, podemos olhar para o caso mais simples de interação de um fóton com um campo escalar complexo (QED escalar). Nesse caso, consideramos a identidade

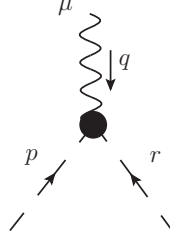


Figura 3.2: Vértice fóton-campo escalar com a convenção de momentos adotada.

de Takahashi satisfeita pelo vértice completo fóton-campo escalar,  $\Gamma_\mu$ , da Fig 3.2,

$$q^\mu \Gamma_\mu(q, r, p) = i\mathcal{D}^{-1}(r^2) - i\mathcal{D}^{-1}(p^2), \quad (3.18)$$

onde  $\mathcal{D}$  é o propagador completo do campo escalar. Para obter a WI correspondente, ou seja, o limite da identidade de Takahashi quando o momento do campo do bóson de gauge tende a zero, devemos expandir ambos os lados da Eq. (3.18) em torno de  $q = 0$ . Assim, obtemos

$$q^\mu \Gamma_\mu(0, r, -r) + \mathcal{O}(q^2) = -iq^\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial q^\mu} \mathcal{D}^{-1}(q+r) \right\}_{q=0} + \mathcal{O}(q^2). \quad (3.19)$$

Então, igualando os termos lineares em  $q^\mu$ , temos

$$\Gamma_\mu(0, r, -r) = -i \left\{ \frac{\partial}{\partial q^\mu} \mathcal{D}^{-1}(q+r) \right\}_{q=0} = -i \frac{\partial}{\partial r^\mu} \mathcal{D}^{-1}(r^2), \quad (3.20)$$

que é a expressão análoga à conhecida WI obedecida pelo vértice elétron-fóton de QED espinorial.

Aplicando o processo acima nas duas primeiras identidades da Eq. (3.16), obtemos que, na ausência de polos do tipo  $i/q^2$ , as WIs para os vértices  $BQQ$  e  $B\bar{c}c$  são dadas por

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta}(0, -p, p) = i \frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}^{-1}(p)}{\partial p^\mu}; \quad \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta}(0, r, -r) = -i \frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}^{-1}(r)}{\partial r^\mu}; \quad (3.21)$$

$$\tilde{\Gamma}_\mu(0, -p, p) = i \frac{\partial D^{-1}(p^2)}{\partial p^\mu}; \quad \tilde{\Gamma}_\mu(0, r, -r) = -i \frac{\partial D^{-1}(r^2)}{\partial r^\mu}. \quad (3.22)$$

No caso do vértice  $BQQQ$ , a derivação da WI correspondente é um pouco mais complicada, mas, após algumas manipulações, é possível obter [48]

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta\gamma}^{mnr s}(0, r, p, -r-p) = \left( f^{mne} f^{esr} \frac{\partial}{\partial r^\mu} + f^{mre} f^{ens} \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) \Gamma_{\alpha\beta\gamma}(r, p, -r-p). \quad (3.23)$$

Enfatizamos que as WIs derivadas aqui dependem dos vértices envolvidos admitirem uma expansão de Taylor, ou seja, não contenham polos em  $q = 0$ . Tal hipótese será relaxada posteriormente, quando assumirmos que os vértices contêm polos não massivos.



### 3.3.1 Identidades de Ward e fatores de forma dos vértices

Agora, podemos estudar como as WIs acima impactam os fatores de forma que aparecem na decomposição tensorial dos vértices correspondentes. O caso mais simples é o do vértice gluon-ghost  $B\bar{c}c$ , que, em termos dos dois momentos  $q$  e  $r$ , possui a forma geral

$$\tilde{\Gamma}^\mu(q, r, p) = \tilde{\mathcal{A}}_1(q^2, r^2, p^2)q^\mu + \tilde{\mathcal{A}}_2(q^2, r^2, p^2)r^\mu, \quad (3.24)$$

onde  $q$  é o momento carregado pelo gluon. Em concordância com a condição assumida na derivação das WIs acima, consideramos por enquanto que os fatores de forma  $\tilde{\mathcal{A}}_1$  e  $\tilde{\mathcal{A}}_2$  não possuem polos (cinéticos ou dinâmicos) em  $q^2$ . No limite em que  $q = 0$ , então, temos da Eq. (3.24) que

$$\tilde{\Gamma}^\mu(0, r, -r) = \tilde{\mathcal{A}}_2(r^2)r^\mu. \quad (3.25)$$

Assim, a partir da Eq. (3.22), obtemos

$$\tilde{\mathcal{A}}_2(r^2) = -2i \frac{\partial D^{-1}(r^2)}{\partial r^2}. \quad (3.26)$$

A Eq. (3.26) pode ser checada para o vértice em nível de árvore, dado na Fig. 2.4, que para  $q = 0$  se reduz a

$$\tilde{\Gamma}^\mu(0, r, -r) = -2r^\mu, \quad (3.27)$$

onde utilizamos as definições de vértice do Apêndice B. Nota-se que, de fato, a expressão acima pode ser obtida da Eq. (3.26) utilizando a definição do propagador de ghost perturbativo, dada pela Eq. (2.21), *i.e.*  $D^{-1}(r^2) = -ir^2$ .

Em seguida, podemos considerar o vértice de três gluons  $\tilde{\Gamma}^{\mu\alpha\beta}(q, r, p)$ , cuja decomposição tensorial pode ser escrita como

$$\tilde{\Gamma}^{\mu\alpha\beta}(q, r, p) = \sum_{i=1}^{14} \tilde{A}_i(q^2, r^2, q \cdot r) b_i^{\mu\alpha\beta}, \quad (3.28)$$

onde a base  $b_{\mu\alpha\beta}^i$  é escolhida como

$$\begin{aligned} b_1^{\mu\alpha\beta} &= q^\mu g^{\alpha\beta}; & b_2^{\mu\alpha\beta} &= q^\mu q^\alpha q^\beta; & b_3^{\mu\alpha\beta} &= q^\mu q^\alpha r^\beta; & b_4^{\mu\alpha\beta} &= q^\mu r^\alpha q^\beta; & b_5^{\mu\alpha\beta} &= q^\mu r^\alpha r^\beta, \\ b_6^{\mu\alpha\beta} &= r^\mu g^{\alpha\beta}; & b_7^{\mu\alpha\beta} &= r^\mu q^\alpha q^\beta; & b_8^{\mu\alpha\beta} &= r^\mu q^\alpha r^\beta; & b_9^{\mu\alpha\beta} &= r^\mu r^\alpha q^\beta; & b_{10}^{\mu\alpha\beta} &= r^\mu r^\alpha r^\beta, \\ b_{11}^{\mu\alpha\beta} &= q^\alpha g^{\beta\mu}; & b_{12}^{\mu\alpha\beta} &= q^\beta g^{\alpha\mu}; & b_{13}^{\mu\alpha\beta} &= r^\alpha g^{\beta\mu}; & b_{14}^{\mu\alpha\beta} &= r^\beta g^{\alpha\mu}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Assim como no caso do vértice gluon-ghost, assume-se que os fatores de forma  $\tilde{A}_i$  não contêm polos em  $q^2$ . Logo, no limite  $q \rightarrow 0$ , apenas as componentes  $b_6$ ,  $b_{10}$ ,  $b_{13}$  e  $b_{14}$  sobrevivem, pois são independentes de  $q$ , assim,

$$\tilde{\Gamma}^{\mu\alpha\beta}(0, r, -r) = \tilde{A}_6(r^2)r^\mu g^{\alpha\beta} + \tilde{A}_{10}(r^2)r^\mu r^\alpha r^\beta + \tilde{A}_{13}r^\alpha g^{\beta\mu} + \tilde{A}_{14}r^\beta g^{\alpha\mu}. \quad (3.30)$$

A expressão para o propagador de gluon dada na Eq. (2.1) pode ser transformada em uma expressão para o inverso do propagador<sup>1</sup>,

$$-i\Delta_{\mu\nu}^{-1}(q) = \Delta^{-1}(q^2)P_{\mu\nu}(q) + \xi^{-1}q_\mu q_\nu. \quad (3.31)$$

Com isso, pode-se calcular o lado direito da WI para o vértice  $\tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta}$  da Eq. (3.21) e comparar com as estruturas tensoriais da Eq. (3.30), de forma a obter

$$\tilde{A}_6(r^2) = 2\frac{\partial\Delta^{-1}(r^2)}{\partial r^2}, \quad \tilde{A}_{10}(r^2) = -2\frac{\partial}{\partial r^2} \left( \frac{\Delta^{-1}(r^2)}{r^2} \right), \quad \tilde{A}_{13}(r^2) = \tilde{A}_{14}(r^2) = \frac{1}{\xi} - \frac{\Delta^{-1}(r^2)}{r^2}. \quad (3.32)$$

Não é difícil verificar a validade dos resultados acima em nível de árvore, pois o vértice  $BQQ$  em  $q = 0$  é dado por (Apêndice B)

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta}^{(0)}(0, r, -r) = 2r_\mu g_{\alpha\beta} + r_\alpha g_{\beta\mu} \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) + r_\beta g_{\alpha\mu} \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right), \quad (3.33)$$

o que resulta em

$$A_6^{(0)}(r^2) = 2, \quad A_{10}^{(0)}(r^2) = 0, \quad A_{13}^{(0)} = A_{14}^{(0)} = \frac{1}{\xi} - 1, \quad (3.34)$$

que é exatamente o que a Eq. (3.32) gera com  $\Delta^{-1}(r^2) = r^2$ .

A construção análoga para o caso do vértice de quatro gluons,  $\tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta\gamma}^{mnrs}(q, r, p, t)$ , seria bem mais extensa devido ao elevado número de estruturas tensoriais envolvidas na sua decomposição de Lorentz e, portanto, não será realizada. Veremos adiante que essa decomposição de  $\tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta\gamma}^{mnrs}(q, r, p, t)$  não é necessária para a realização dos cálculos de  $\Delta(0)$  em que estamos interessados.

### 3.3.2 Aplicação na autoenergia do fóton em QED escalar

Um exemplo de como a identidade de seagull age juntamente com a identidade de Ward-Takahashi é observado em QED escalar. Em aproximação de um loop vestido, a autoenergia do fóton nessa teoria é dada pela soma de diagramas da Fig. 3.3, cuja expressão matemática é dada por

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = e^2 \int_k \Gamma_\mu^{(0)} \mathcal{D}(k) \mathcal{D}(k+q) \Gamma_\nu + e^2 \int_k \Gamma_{\mu\nu}^{(0)}(k), \quad (3.35)$$

sendo  $\Gamma_\mu^{(0)}$  a expressão para o vértice fóton-escalar em nível de árvore,

$$\Gamma_\mu^{(0)} = -i(2k+q)_\mu. \quad (3.36)$$

---

<sup>1</sup>Note que  $\Delta_\mu^\nu(q)\Delta_{\nu\rho}^{-1}(q) = -ig_{\mu\rho}$ .

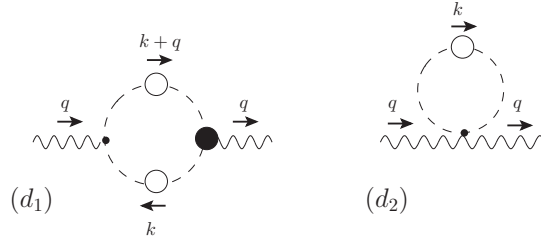


Figura 3.3: A contribuição de um loop vestido para a ESD da autoenergia do fóton em QED escalar.

Adicionalmente, o vértice que aparece no diagrama  $(d_2)$  da Fig. 3.3 é expresso como

$$\Gamma_{\mu\nu}^{(0)} = 2ig_{\mu\nu}. \quad (3.37)$$

A partir da identidade de Takahashi da Eq. (3.18), não é difícil mostrar que  $q^\nu \Pi_{\mu\nu}(q) = 0$ , ou seja  $\Pi_{\mu\nu}(q)$  é transverso e assume a forma  $\Pi_{\mu\nu}(q) = \Pi(q^2)P_{\mu\nu}(q)$ . Assim,  $\Pi(q^2)$  é dado por

$$\Pi(q^2) = \frac{-2ie^2}{d-1} \left[ \int_k \mathcal{D}(k) \mathcal{D}(k+q) k^\mu \Gamma_\mu - d \int_k \mathcal{D}(k) \right]. \quad (3.38)$$

Em um loop de teoria de perturbação, a expressão para a autoenergia do fóton,  $\Pi^{(1)}(q^2)$ , é escrita como

$$\Pi^{(1)}(q^2) = \frac{-ie^2}{d-1} \left[ \int_k (4k^2 - q^2) \mathcal{D}_0(k) \mathcal{D}_0(k+q) - 2d \int_k \mathcal{D}_0(k) \right], \quad (3.39)$$

onde  $\mathcal{D}_0(k) = (k^2 - m^2)^{-1}$ . Agora, tomando o limite em que  $q \rightarrow 0$ , temos

$$\Pi^{(1)}(0) = \frac{-4ie^2}{d-1} \left[ \int_k k^2 \mathcal{D}_0^2(k) - \frac{d}{2} \int_k \mathcal{D}_0(k) \right], \quad (3.40)$$

que é a identidade de seagull da Eq. (3.14) com  $f(k^2) = \mathcal{D}_0(k^2)$ . Consequentemente, temos que  $\Pi^{(1)}(0) = 0$ , como esperado, já que o fóton permanece não massivo perturbativamente.

Pode-se analisar o caso de um loop vestido dado pela Eq. (3.35). Isso foi feito em [58] e obtém-se que, de fato,  $\Pi(0) = 0$  na ausência de polos no vértice. Assim, a identidade de Ward-Takahashi aliada a identidade de seagull garante a massa nula do fóton em QED escalar. Veremos, então, que algo semelhante acontece com a autoenergia do gluon na origem.

### 3.4 A autoenergia do gluon na origem

As WIs Abelianas derivadas anteriormente podem ser utilizadas para escrever a expressão que determina a autoenergia do gluon na origem,  $\tilde{\Pi}(0)$ , em uma forma particular

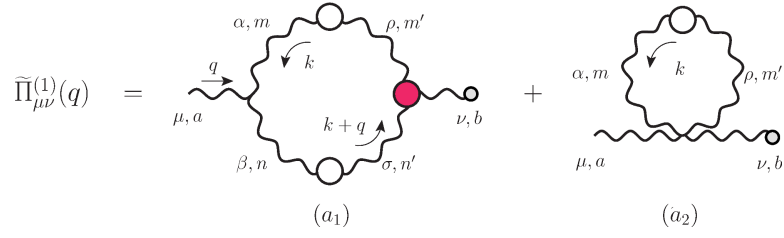


Figura 3.4: Diagramas gluônicos de um loop vestido contribuindo para a ESD da autoenergia do gluon  $QB$ . Círculos brancos indicam propagadores completos e círculos vermelhos vértices de três gluons completos.

que nos permite o uso da identidade de seagull. Lembramos que  $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(0) = \tilde{\Pi}(0)g_{\mu\nu}$ . Além disso, índices de cor serão suprimidos sempre que possível.

Começamos, então, com a primeira contribuição à autoenergia dada pela soma dos diagramas  $(a_1)$  e  $(a_2)$  da Fig. 2.5 (bloco verde). Por conveniência, mostramos estes dois diagramas novamente na Fig. 3.4, onde especificamos a convenção de momento adotada. Mais especificadamente, em  $q = 0$  temos

$$d\tilde{\Pi}^{(1)}(0) = a_1(0) + a_2(0), \quad (3.41)$$

com

$$a_1(0) = \frac{1}{2}g^2C_A \int_k \Gamma_{\mu\alpha\beta}^{(0)}(0, k, -k) \Delta^{\alpha\rho}(k) \Delta^{\beta\sigma}(k) \tilde{\Gamma}_{\sigma\rho}^{\mu}(0, k, -k), \quad (3.42)$$

$$a_2(0) = -ig^2C_A(d-1) \int_k \Delta_{\alpha}^{\alpha}(k), \quad (3.43)$$

onde o vértice de três gluons convencional em nível de árvore é dado por

$$\Gamma_{\mu\alpha\beta}^{(0)}(0, k, -k) = 2k_{\mu}g_{\alpha\beta} - k_{\beta}g_{\alpha\mu} - k_{\alpha}g_{\beta\mu}. \quad (3.44)$$

Assim, usando a Eq. (3.21), deriva-se a relação

$$\Delta^{\alpha\rho}(k) \Delta^{\beta\sigma}(k) \tilde{\Gamma}_{\sigma\rho}^{\mu}(0, k, -k) = -i \frac{\partial}{\partial k^{\mu}} \Delta^{\alpha\beta}(k), \quad (3.45)$$

de maneira que podemos reescrever a Eq. (3.42) como

$$a_1(0) = -\frac{i}{2}g^2C_A \left\{ \int_k \frac{\partial}{\partial k^{\mu}} [\Gamma_{\mu\alpha\beta}^{(0)}(0, k, -k) \Delta^{\alpha\beta}(k)] - \int_k \Delta^{\alpha\beta}(k) \frac{\partial}{\partial k^{\mu}} \Gamma_{\mu\alpha\beta}^{(0)}(0, k, -k) \right\}. \quad (3.46)$$

Além disso, temos

$$\frac{\partial}{\partial k^{\mu}} \Gamma_{\mu\alpha\beta}^{(0)}(0, k, -k) = 2(d-1)g_{\alpha\beta}. \quad (3.47)$$

Nota-se, então, que o segundo termo da Eq. (3.46) cancela com a expressão para  $a_2(0)$

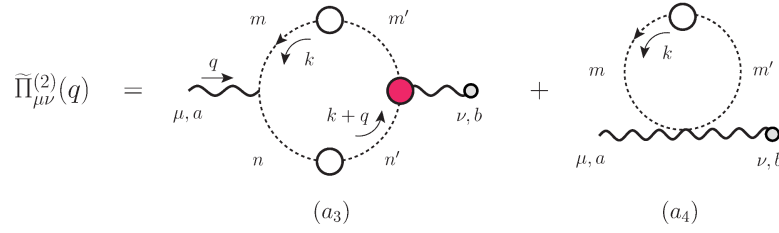


Figura 3.5: Diagramas de um loop vestido de ghost contribuindo para a ESD da autoenergia do gluon  $QB$ . Círculos brancos indicam propagadores completos e círculos pretos vértices gluon-ghost completos.

da Eq. (3.43), o que nos leva a

$$d\tilde{\Pi}^{(1)}(0) = -g^2 C_A (d-1) \int_k \frac{\partial \mathcal{F}_\mu^{(1)}(k)}{\partial k^\mu}; \quad \mathcal{F}_\mu^{(1)}(k) = \Delta(k^2) k_\mu. \quad (3.48)$$

Portanto, devido a identidade de seagull,  $d\tilde{\Pi}^{(1)}(0) = 0$ .

Agora, olhemos para os diagramas de loop de ghost da Fig. 3.5, que aparecem no bloco laranja da Fig. 2.5. Em  $q = 0$ , temos

$$a_3(0) = -g^2 C_A \int_k k_\mu D^2(k^2) \tilde{\Gamma}^\mu(0, k, -k), \quad (3.49)$$

$$a_4(0) = dg^2 C_A \int_k D(k^2). \quad (3.50)$$

A partir da Eq. (3.22), é possível obter

$$a_3(0) = g^2 C_A \left\{ \int_k \frac{\partial}{\partial k^\mu} [\Gamma_\mu^{(0)} D(k^2)] - d \int_k D(k^2) \right\}. \quad (3.51)$$

Logo, o segundo termo da Eq. (3.51) se anula com  $a_4(0)$ , de forma que

$$d\tilde{\Pi}^{(2)}(0) = g^2 C_A \int_k \frac{\partial \mathcal{F}_\mu^{(2)}(k)}{\partial k^\mu}; \quad \mathcal{F}_\mu^{(2)}(k) = D(k^2) k_\mu, \quad (3.52)$$

ou seja,  $\tilde{\Pi}^{(2)}(0) = 0$

Por fim, o último bloco da Fig. 2.5 apresenta as contribuições gluônicas de dois loops vestidos,  $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(3)}(q)$ , destacadas na Fig. 3.6, cujos diagramas em  $q = 0$  são expressados matematicamente por

$$\begin{aligned} a_5^{ab}(0) &= \frac{i}{6} g^4 \Gamma_{\mu\alpha\beta\gamma}^{(0)amnr} \int_k \int_\ell \Delta^{\gamma\tau}(k) \Delta^{\beta\sigma}(\ell) \Delta^{\alpha\rho}(k+\ell) \tilde{\Gamma}_{\mu\tau\sigma\rho}^{brnm}(0, k, \ell, -k-\ell), \\ a_6(0) &= \mathcal{N}_{\mu\alpha\beta\gamma} \int_k \Delta^{\gamma\tau}(k) \Delta^{\lambda\delta}(k) Y_\delta^{\alpha\beta}(k) \tilde{\Gamma}_{\tau\lambda}^\mu(0, k, -k), \end{aligned} \quad (3.53)$$

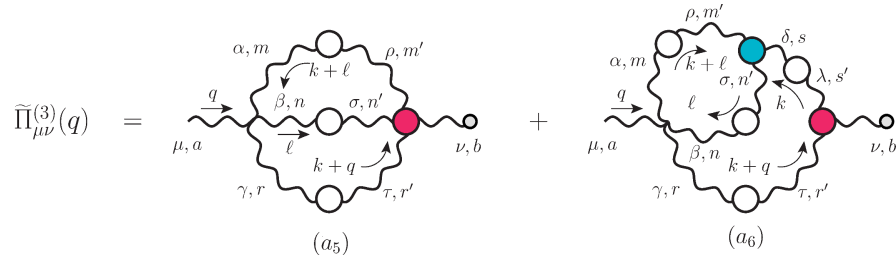


Figura 3.6: Diagramas gluônicos de dois loops vestidos contribuindo para a ESD da autoenergia do gluon  $QB$ .

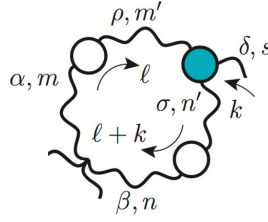


Figura 3.7: Subdiagrama  $Y_\delta^{\alpha\beta}(k)$ , que aparece no diagrama  $(a_6)$  da contribuição de dois loops vestidos para a autoenergia do gluon.

onde definimos

$$\mathcal{N}_{\mu\alpha\beta\gamma} = \frac{3}{4}ig^4C_A^2(g_{\mu\alpha}g_{\gamma\beta} - g_{\mu\beta}g_{\gamma\alpha}), \quad (3.54)$$

e

$$Y_\delta^{\alpha\beta}(k) = \int_\ell \Delta^{\alpha\rho}(\ell)\Delta^{\beta\sigma}(k+\ell)\Gamma_{\sigma\rho\delta}(-k-\ell, \ell, k), \quad (3.55)$$

que corresponde ao subdiagrama da Fig. 3.7 que está aninhado no diagrama  $(a_6)$  mostrado na Fig. 3.6. Este subdiagrama foi objeto de estudo na Ref. [55] e, devido a simetria de Bose do vértice  $\Gamma_{\sigma\rho\delta}$ , assume a forma

$$Y_\delta^{\alpha\beta}(k) = (k^\alpha g_\delta^\beta - k^\beta g_\delta^\alpha)Y(k^2); \quad Y(k^2) = \frac{1}{d-1} \frac{1}{k^2} k_\alpha g_\beta^\delta Y_\delta^{\alpha\beta}(k). \quad (3.56)$$

Fazendo uso da Eq. (3.45), obtemos

$$a_6(0) = \mathcal{N}_{\mu\alpha\beta\gamma} \int_k Y_\delta^{\alpha\beta}(k) \frac{\partial \Delta^{\gamma\delta}(k)}{\partial k^\mu}. \quad (3.57)$$

Adicionalmente, após empregar a WI da Eq. (3.23), encontramos que

$$\begin{aligned} a_5^{ab}(0) &= \frac{i}{6}g^4\Gamma_{\mu\alpha\beta\gamma}^{(0)amnr} \int_k \int_\ell \Delta^{\gamma\tau}(k)\Delta^{\beta\sigma}(\ell)\Delta^{\alpha\rho}(k+\ell) \\ &\times \left( f^{brx} f^{xmn} \frac{\partial}{\partial k^\mu} + f^{bnx} f^{xrm} \frac{\partial}{\partial \ell^\mu} \right) \Gamma_{\tau\sigma\rho}(k, \ell, -k-\ell). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Podemos, ainda, utilizar as identidades

$$\begin{aligned} f^{brx} f^{xmn} \Gamma_{\mu\alpha\beta\gamma}^{(0)amnr} &= \frac{3}{2} C_A^2 \delta^{ab} (g_{\mu\alpha} g_{\beta\gamma} - g_{\mu\beta} g_{\alpha\gamma}), \\ f^{bnx} f^{xrm} \Gamma_{\mu\alpha\beta\gamma}^{(0)amnr} &= \frac{3}{2} C_A^2 \delta^{ab} (g_{\mu\gamma} g_{\alpha\beta} - g_{\mu\alpha} g_{\beta\gamma}), \end{aligned} \quad (3.59)$$

de forma que é possível chegar a

$$a_5(0) = \mathcal{N}_{\mu\alpha\beta\gamma} \left\{ \frac{2}{3} \int_k \frac{\partial}{\partial k^\mu} [\Delta^{\gamma\delta}(k) Y_\delta^{\alpha\beta}(k)] - \int_k Y_\delta^{\alpha\beta}(k) \frac{\partial \Delta^{\gamma\delta}(k)}{\partial k^\mu} \right\}, \quad (3.60)$$

onde o fator de cor  $\delta^{ab}$  foi omitido. O segundo termo, então, cancela com a Eq. (3.57) e obtemos

$$d \tilde{\Pi}^{(3)}(0) = -i(d-1)g^4 C_A^2 \int_k \frac{\partial \mathcal{F}_\mu^{(3)}(k)}{\partial k^\mu}; \quad \mathcal{F}_\mu^{(3)}(k) = \Delta(k^2) Y(k^2) k_\mu. \quad (3.61)$$

As demonstrações desta seção dadas pelas Eqs. (3.48), (3.52) e (3.61) estabelecem que, assumindo a ausência de polos do tipo  $1/q^2$  nos fatores de forma dos vértices fundamentais,

$$\tilde{\Pi}^{(i)}(0) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Pi}(0) = \sum_{i=1}^3 \tilde{\Pi}^{(i)}(0) = 0, \quad (3.62)$$

o que nos leva a

$$\tilde{\Delta}^{-1}(q^2) = q^2 + i \left[ \tilde{\Pi}^{(1)}(q^2) + \tilde{\Pi}^{(2)}(q^2) + \tilde{\Pi}^{(3)}(q^2) \right] \Rightarrow \tilde{\Delta}^{-1}(0) = 0. \quad (3.63)$$

Também temos que, em  $q = 0$ ,

$$\Delta^{-1}(0) = \frac{\tilde{\Delta}^{-1}(0)}{1 + G(0)}. \quad (3.64)$$

Se introduzirmos, agora, a hipótese adicional de que a função  $1 + G(0)$  é finita para todo  $\xi$ , chegamos a conclusão final de que

$$\Delta^{-1}(0) = 0, \quad (3.65)$$

ou seja, o gluon possui massa nula na ausência de polos em  $q^2$ .

Observa-se que as provas elaboradas acima são válidas para qualquer valor do parâmetro de fixação de gauge,  $\xi$ , dentro da classe de gauges covariantes lineares ( $R_\xi$ ). Adicionalmente, em um gauge  $R_\xi$  geral, existe uma relação entre a função  $G$  e a função de dressing do propagador de ghost  $F$ , que lê [59]

$$F^{-1}(q^2) = 1 + G(q^2) + L(q^2) + \xi K(q^2), \quad (3.66)$$

onde  $K$  representa a função associada ao acoplamento do antighost com uma certa fonte anti-BRST necessária para formular o BFM. No gauge de Landau, como a função de dressing do propagador de ghost é não nula em  $q^2 = 0$  enquanto  $L(0) = 0$  [43], obtém-se

$$F^{-1}(0) = 1 + G(0), \quad (3.67)$$

o que garante a finitude de  $1 + G(0)$ . Para  $\xi \neq 0$ , porém, a situação é mais complicada. Contudo, estudos analíticos recentes [60,61] revelam que o propagador de gluon continua a saturar no IR, um resultado que tem sido confirmado por simulações da rede [31]. Isso aponta que  $1 + G(0)$  deve de fato permanecer finito quando  $\xi \neq 0$  [48].

Enfatiza-se que nenhum Ansatz específico foi utilizado para os vértices completos aparecendo nas derivações acima. Isso pode ser contrastado com a demonstração original do cancelamento de seagull apresentada em [58].

### 3.4.1 Renormalização

Agora, é necessário conferir se a conclusão de que a anulação  $\Delta^{-1}(0)$  na ausência de polos persiste após a renormalização, *i.e.*, se  $\Delta_R^{-1}(0) = 0$ . Para isso, começamos com as condições de renormalização no setor quântico da teoria:

$$\Delta_R = Z_Q^{-1} \Delta(q^2); \quad D_R = Z_c^{-1} D(q^2); \quad g_R = Z_g^{-1} g, \quad (3.68)$$

$$\Gamma_R^\mu = Z_1 \Gamma^\mu; \quad \Gamma_R^{\mu\alpha\beta} = Z_3 \Gamma^{\mu\alpha\beta}; \quad \Gamma_{R\mu\alpha\beta\nu}^{mnr s} = Z_4 \Gamma_{\mu\alpha\beta\nu}^{mnr s}, \quad (3.69)$$

onde  $Z_Q$  é a constante de renormalização do propagador de gluon convencional,  $Z_c$  a do propagador de ghost,  $Z_g$  a da constante de acoplamento e  $Z_1$ ,  $Z_3$  e  $Z_4$  as dos vértices convencionais de gluon-ghost, três gluons e quatro gluons, respectivamente. As condições que relacionam as constantes acima são aquelas estabelecidas para gauges covariantes [38], onde as STIs da teoria garantem a validade de

$$Z_g = Z_1 Z_Q^{-1/2} Z_c^{-1} = Z_3 Z_Q^{-3/2} = Z_4^{1/2} Z_Q^{-1}. \quad (3.70)$$

Considere, então, os setores background e quântico-background; as funções de dois pontos relevantes são renormalizadas como

$$\widehat{\Delta}_R = Z_B^{-1} \widehat{\Delta}; \quad \widetilde{\Delta}_R = \mathcal{Z}^{-1} \widetilde{\Delta}; \quad G_R = Z_G G, \quad (3.71)$$

sendo  $Z_B$  a constante de renormalização do propagador BB,  $\mathcal{Z}$  a do propagador QB e  $Z_G$  a da função de dois pontos  $G(q^2)$ . Tais constantes satisfazem

$$Z_g = Z_B^{-1/2}; \quad \mathcal{Z} = Z_Q^{1/2} Z_B^{1/2}; \quad Z_G = Z_Q^{-1/2} Z_B^{1/2}; \quad Z_G = Z_c Z_1^{-1} = \mathcal{Z} Z_Q^{-1}. \quad (3.72)$$



Similarmente, as constantes de renormalização dos três vértices envolvendo um gluon background, que carrega momento  $q$ , são definidas como

$$\tilde{\Gamma}_R^\mu = \tilde{Z}_1 \tilde{\Gamma}^\mu; \quad \tilde{\Gamma}_R^{\mu\alpha\beta} = \tilde{Z}_3 \tilde{\Gamma}^{\mu\alpha\beta}; \quad \tilde{\Gamma}_R^{mnrs}{}_{\mu\alpha\beta\nu} = \tilde{Z}_4 \tilde{\Gamma}^{mnrs}{}_{\mu\alpha\beta\nu}, \quad (3.73)$$

onde  $\tilde{Z}_1$ ,  $\tilde{Z}_3$  e  $\tilde{Z}_4$  são, respectivamente, as constantes de renormalização dos vértices gluon-ghost  $B\bar{c}c$ , três gluons BQQ e quatro gluons BQQQ. As STIs Abelianas correspondentes impõem as condições:

$$\tilde{Z}_1 = Z_c; \quad \tilde{Z}_3 = Z_Q; \quad \tilde{Z}_4 = Z_3. \quad (3.74)$$

Utilizando as relações acima, é possível chegar a [48]

$$\tilde{\Delta}_R^{-1}(q^2) = \mathcal{Z}q^2 + i \left[ Z_3 \tilde{\Pi}_R^{(1)}(q^2) + Z_1 \tilde{\Pi}_R^{(2)}(q^2) + Z_4 \tilde{\Pi}_R^{(3)}(q^2) \right], \quad (3.75)$$

onde foram introduzidas as combinações

$$Z_3 = \mathcal{Z}Z_g^2 Z_Q; \quad Z_1 = \mathcal{Z}Z_g^2 Z_c; \quad Z_4 = \mathcal{Z}Z_g^4 Z_3^{-1} Z_Q^3. \quad (3.76)$$

Assim, fica claro que  $\Delta_R^{-1}(0) = 0$ .

A constante  $\mathcal{Z}$  pode ser fixada utilizando o esquema de renormalização subtrativa de momento (MOM), que garante que o propagador do gluon recuperará sua forma em nível de árvore na escala de renormalização  $\mu$ . Portanto, a condição de renormalização é imposta de forma que  $\tilde{\Delta}_R^{-1}(\mu^2) = \mu^2$ . Assim, a constante de renormalização  $\mathcal{Z}$  é fixada como sendo

$$\mathcal{Z} = 1 - \frac{i}{\mu^2} \left[ Z_3 \tilde{\Pi}_R^{(1)}(\mu^2) + Z_1 \tilde{\Pi}_R^{(2)}(\mu^2) + Z_4 \tilde{\Pi}_R^{(3)}(\mu^2) \right]. \quad (3.77)$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_R^{-1}(q^2) &= q^2 + i \left[ Z_3 \tilde{\Pi}_R^{(1)}(q^2) + Z_1 \tilde{\Pi}_R^{(2)}(q^2) + Z_4 \tilde{\Pi}_R^{(3)}(q^2) \right] \\ &\quad - \frac{q^2}{\mu^2} i \left[ Z_3 \tilde{\Pi}_R^{(1)}(\mu^2) + Z_1 \tilde{\Pi}_R^{(2)}(\mu^2) + Z_4 \tilde{\Pi}_R^{(3)}(\mu^2) \right], \end{aligned} \quad (3.78)$$

de maneira que, novamente,  $\Delta_R^{-1}(0) = 0$ .

## 3.5 Contornando o cancelamento de seagull

Na seção anterior vimos que o inverso do propagador de gluon, na ausência de polos nos vértices, é nulo devido a ação da identidade de seagull. A obtenção de um propagador de gluon finito ocorre a partir da implementação não Abeliana do mecanismo de Schwinger, a qual requer a presença de polos não massivos longitudinalmente acoplados nos vértices fundamentais da teoria. Especificamente, assumimos que alguns dos fatores de forma

passam a conter polos do tipo  $1/q^2$ , de maneira que agora esses fatores de forma podem ser divididos em duas partes, uma na ausência de polos (sobrescrito “np”) e uma que contém a contribuição dos polos (sobrescrito “p”). Porém, somente os fatores de forma longitudinalmente acoplados podem conter partes com polo, pois tais polos devem agir como bósons de Nambu-Goldstone dinâmicos e se dissociarem das amplitudes *on-shell*. Isso implica que a parte do vértice de três gluons que contém polo,  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu}^{\mathbf{p}}(q, r, p)$ , por exemplo, deve satisfazer

$$P^{\alpha'\alpha}(q)P^{\mu'\mu}(r)P^{\nu'\nu}(p)\tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu}^{\mathbf{p}}(q, r, p) = 0. \quad (3.79)$$

Aqui consideramos apenas polos em  $q^2$ , pois esse é o canal relevante na ESD do propagador de gluon onde os vértices serão eventualmente inseridos (veja Figs. 3.4, 3.5 e 3.6). É claro que polos associados a  $r$  e  $p$  também podem aparecer, pois os vértices também devem satisfazer as STIs correspondentes com respeito a  $r^\mu$  e  $p^\mu$ , contudo, essas STIs não aparecem na análise do propagador de gluon da Fig. 2.5. Assim, enquanto anteriormente nenhum dos fatores de forma possuía polos, agora, usando a notação introduzida nas Eqs. (3.24) e (3.28), temos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}_1 &= \tilde{\mathcal{A}}_1^{\mathbf{np}} + \tilde{\mathcal{A}}_1^{\mathbf{p}}; & \tilde{\mathcal{A}}_2 &= \tilde{\mathcal{A}}_2^{\mathbf{np}}, \\ \tilde{\mathcal{A}}_i &= \tilde{\mathcal{A}}_i^{\mathbf{np}} + \tilde{\mathcal{A}}_i^{\mathbf{p}}, \quad i = 1, \dots, 5; & \tilde{\mathcal{A}}_i &= \tilde{\mathcal{A}}_i^{\mathbf{np}}, \quad i = 6, \dots, 14, \end{aligned} \quad (3.80)$$

onde, no caso do vértice de três gluons, somente os fatores de forma  $\tilde{\mathcal{A}}_i$  com  $i = 1, \dots, 5$  satisfazem a Eq. (3.79).

Assim, os vértices completos não perturbativos que aparecem nos diagramas da Fig. 2.5 passam a ser escritos na forma

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta}(q, r, p) &= \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta}^{\mathbf{np}}(q, r, p) + \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta}^{\mathbf{p}}(q, r, p), \\ \tilde{\Gamma}_\mu(q, r, p) &= \tilde{\Gamma}_\mu^{\mathbf{np}}(q, r, p) + \tilde{\Gamma}_\mu^{\mathbf{p}}(q, r, p), \\ \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta\gamma}^{mnrs}(q, r, p, t) &= \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta\gamma}^{\mathbf{np}, mnrs}(q, r, p, t) + \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta\gamma}^{\mathbf{p}, mnrs}(q, r, p, t), \end{aligned} \quad (3.81)$$

onde, devido a condição de longitudinalidade, temos

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta}^{\mathbf{p}}(q, r, p) &= \frac{q_\mu}{q^2} \tilde{C}_{\alpha\beta}(q, r, p), \\ \tilde{\Gamma}_\mu^{\mathbf{p}}(q, r, p) &= \frac{q_\mu}{q^2} \tilde{C}(q, r, p), \\ \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta\gamma}^{\mathbf{p}, mnrs}(q, r, p, t) &= \frac{q_\mu}{q^2} \tilde{C}_{\alpha\beta\gamma}^{mnrs}(q, r, p, t). \end{aligned} \quad (3.82)$$

A Fig. 3.8 é uma representação esquemática desta divisão para o caso do vértice de três gluons. Obviamente, a mesma visão diagramática pode ser estendida para o vértice gluon-ghost e de quatro gluons. A relação entre os vértices e os fatores de forma também

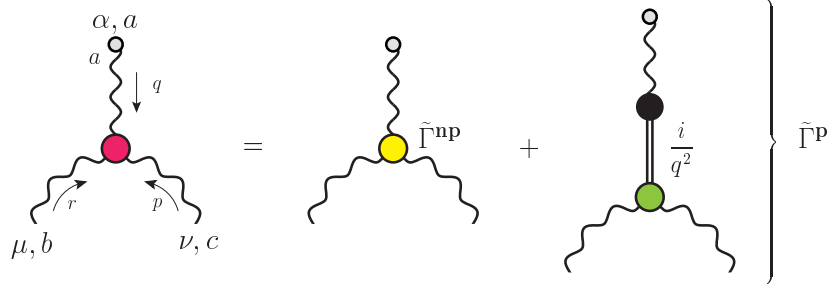


Figura 3.8: A divisão do vértice de três glúons completo (vermelho) em uma parte que não possui polo em  $q^2$ ,  $\tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta}^{\text{np}}$  (amarelo), e uma parte que contém polo longitudinalmente acoplado,  $\tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta}^{\text{p}}$  (verde).

é modificada. No caso do vértice gluon-ghost, por exemplo, temos

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{\mu}^{\text{np}}(q, r, p) &= \tilde{\mathcal{A}}_1^{\text{np}} q_{\mu} + \tilde{\mathcal{A}}_2^{\text{np}} r_{\mu} \\ \tilde{\Gamma}_{\mu}^{\text{p}}(q, r, p) &= \tilde{\mathcal{A}}_1^{\text{p}} q_{\mu} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathcal{A}}_1^{\text{p}} \equiv \frac{\tilde{C}(q, r, p)}{q^2}.\end{aligned}\quad (3.83)$$

Para manter a invariância BRST intacta, todas as STIs devem manter a sua forma exata mesmo na presença dos polos, de forma que a Eq. (3.16), combinada com as Eqs. (3.81) e (3.82), passa a ser escrita como

$$\begin{aligned}q^{\mu}\tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta}^{\text{np}}(q, r, p) + \tilde{C}_{\alpha\beta}(q, r, p) &= i\Delta_{\alpha\beta}^{-1}(r) - i\Delta_{\alpha\beta}^{-1}(p), \\ q^{\mu}\tilde{\Gamma}_{\mu}^{\text{np}}(q, r, p) + \tilde{C}(q, r, p) &= D^{-1}(r^2) - D^{-1}(p^2), \\ q^{\mu}\tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta\gamma}^{\text{np}, mnrs}(q, r, p, t) + \tilde{C}_{\alpha\beta\gamma}^{mnrs}(q, r, p, t) &= f^{mse} f^{ern} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}(r, p, q + t) + f^{mne} f^{esr} \Gamma_{\beta\gamma\alpha}(p, t, q + r) \\ &\quad + f^{mre} f^{ens} \Gamma_{\gamma\alpha\beta}(t, r, q + p).\end{aligned}\quad (3.84)$$

Além disso, devemos derivar as expressões equivalentes às Eqs. (3.21), (3.22) e (3.23) a partir da expansão de Taylor em torno de  $q = 0$  aplicada em ambos os lados da Eq. (3.84). É fácil ver que os termos de ordem zero se anulam nos três casos,

$$\tilde{C}_{\alpha\beta}(0, r, -r) = 0; \quad \tilde{C}(0, -r, r) = 0; \quad \tilde{C}_{\alpha\beta\gamma}^{mnrs}(0, r, p, -p - r) = 0, \quad (3.85)$$

enquanto os termos de ordem  $q^{\mu}$  para o vértice  $BQQ$  fornecem

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta}^{\text{np}}(0, r, -r) &= -i \frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}^{-1}(r)}{\partial r^{\mu}} - \left\{ \frac{\partial}{\partial q^{\mu}} \tilde{C}_{\alpha\beta}(q, r, -r - q) \right\}_{q=0}; \\ \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta}^{\text{np}}(0, p, -p) &= i \frac{\partial \Delta_{\alpha\beta}^{-1}(p)}{\partial p^{\mu}} - \left\{ \frac{\partial}{\partial q^{\mu}} \tilde{C}_{\alpha\beta}(q, -p - q, p) \right\}_{q=0}.\end{aligned}\quad (3.86)$$

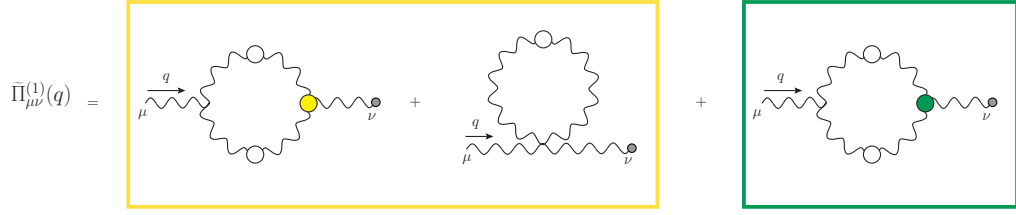


Figura 3.9: Contribuição dos diagramas gluônicos de um loop vestido à autoenergia  $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(1)}(q)$ . O vértice de três gluons que aparece em vermelho na Fig. 3.4 foi dividido, como mostrado na Fig. 3.8, em uma parte sem polo em  $q$ ,  $\tilde{\Gamma}_{\rho\sigma\nu}^{\text{np}}$  (vértice amarelo), e outra que contém a contribuição do polo longitudinalmente acoplado (verde).

Similarmente, para o vértice  $B\bar{c}c$  temos

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{\mu}^{\text{np}}(0, r, -r) &= -i \frac{\partial D^{-1}(r^2)}{\partial r^{\mu}} - \left\{ \frac{\partial}{\partial q^{\mu}} \tilde{C}(q, r, -r - q) \right\}_{q=0}, \\ \tilde{\Gamma}_{\mu}^{\text{np}}(0, p, -p) &= i \frac{\partial D^{-1}(p^2)}{\partial p^{\mu}} - \left\{ \frac{\partial}{\partial q^{\mu}} \tilde{C}(q, -p - q, p) \right\}_{q=0},\end{aligned}\quad (3.87)$$

e para o vértice  $BQQQ$ ,

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta\gamma}^{\text{np},mnrs}(0, r, p, -r - p) &= \left( f^{mne} f^{esr} \frac{\partial}{\partial r^{\mu}} + f^{mre} f^{ens} \frac{\partial}{\partial p^{\mu}} \right) \Gamma_{\alpha\beta\gamma}(r, p, -r - p) \\ &\quad - \left\{ \frac{\partial}{\partial q^{\mu}} \tilde{C}_{\alpha\beta\gamma}^{mnrs}(q, r, p, -q - r - p) \right\}_{q=0}, \\ \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta\gamma}^{\text{np},mnrs}(0, -r, -p, r + p) &= - \left( f^{mne} f^{esr} \frac{\partial}{\partial r^{\mu}} + f^{mre} f^{ens} \frac{\partial}{\partial p^{\mu}} \right) \Gamma_{\alpha\beta\gamma}(-r, -p, r + p) \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial}{\partial q^{\mu}} \tilde{C}_{\alpha\beta\gamma}^{mnrs}(-q, -r, -p, q + r + p) \right\}_{q=0}.\end{aligned}\quad (3.88)$$

Agora, podemos repetir os cálculos realizados anteriormente; especificamente, as contribuições do vértice que sobrevivem no limite  $q = 0$  nos vários diagramas de autoenergia devem ser substituídos pelas WIs correspondentes. Contudo, a diferença crucial aqui é que as WIs empregadas devem ser aquelas dadas nas Eqs. (3.86), (3.87) e (3.88), que contêm as derivadas das funções  $\tilde{C}$ . Como resultado, os termos iguais aos que aparecem no caso dos vértices sem polos irão acionar as identidades de seagull novamente, de forma a resultar em uma contribuição nula, como antes. Já as contribuições originadas a partir de  $\tilde{C}$  sobreviverão. Podemos compreender isso diagramaticamente a partir da Fig 3.9, onde temos o exemplo da divisão do vértice de três gluons que aparece em vermelho na Fig. 3.4 em uma parte com polo,  $\tilde{\Gamma}_{\rho\sigma\nu}^{\text{p}}$ , e outra sem,  $\tilde{\Gamma}_{\rho\sigma\nu}^{\text{np}}$ , representadas diagramaticamente na Fig 3.8. Novamente na Fig 3.9 fazemos o uso da cores amarela para representar  $\tilde{\Gamma}_{\rho\sigma\nu}^{\text{np}}$  e verde para  $\tilde{\Gamma}_{\rho\sigma\nu}^{\text{p}}$ . A identidade de seagull irá agir no bloco amarelo de diagramas da mesma forma que ocorre no caso de ausência de polos no vértices, cancelando as diver-

gências quadráticas de maneira que a contribuição desse bloco será nula quando  $q = 0$ . Por outro lado, o bloco verde apresenta o diagrama de contém o polo  $1/q^2$  do vértice de três gluons, o que irá gerar uma contribuição residual finita no limite  $q \rightarrow 0$ . Com isso, é possível chegar a

$$d\tilde{\Pi}^{(1)}(0) = -\frac{1}{2}g^2C_A \int_k \Gamma_{\mu\alpha\beta}^{(0)}(0, k, -k) \Delta^{\alpha\rho}(k) \Delta^{\beta\sigma}(k) \left\{ \frac{\partial}{\partial q^\mu} \tilde{C}_{\sigma\rho}(q, -q - k, k) \right\}_{q=0}. \quad (3.89)$$

Repetindo o mesmo procedimento para o vértice gluon-ghost (em vermelho) que aparece na Fig. 3.5, obtemos

$$d\tilde{\Pi}^{(2)}(0) = -g^2C_A \int_k \Gamma_\mu^{(0)}(0, k, -k) D^2(k^2) \left\{ \frac{\partial}{\partial q^\mu} \tilde{C}(q, -q - k, k) \right\}_{q=0}. \quad (3.90)$$

Agora, aplicando o mesmo procedimento para os vértices vermelhos mostrados na Fig. 3.6, encontramos

$$\begin{aligned} d\tilde{\Pi}^{(3)}(0)\delta^{ab} &= \frac{i}{6}g^4\Gamma_{\mu\alpha\beta\gamma}^{(0)amnr} \int_k \int_l \Delta^{\gamma\tau}(k) \Delta^{\beta\sigma}(\ell) \Delta^{\alpha\rho}(k + \ell) \left\{ \frac{\partial}{\partial q^\mu} \tilde{C}_{\tau\sigma\rho}^{brnm}(q, -k - q, -\ell, k + \ell) \right\}_{q=0} \\ &\quad + i\mathcal{N}_{\mu\alpha\beta\gamma}\delta^{ab} \int_k \Delta^{\gamma\tau}(k) \Delta^{\lambda\delta}(k) Y_\delta^{\alpha\beta}(k) \left\{ \frac{\partial}{\partial q^\mu} \tilde{C}_{\tau\lambda}(q, -k - q, k) \right\}_{q=0}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Logo, a presença de polos não massivos permite um valor não nulo para a autoenergia do gluon em  $q = 0$ , possibilitando  $\tilde{\Delta}^{-1}(0) \neq 0$ .

### 3.5.1 Considerações Adicionais

As WIs dadas nas Eqs. (3.86), (3.87) e (3.88) fornecem relações interessantes entre os fatores de forma do vértices correspondentes. Essas relações podem ser derivadas ao considerarmos uma função escalar geral  $f(q, r, p)$ , que é antissimétrica sob  $r \leftrightarrow p$ , e a expandirmos em torno de  $q = 0$ . Lembrando que  $q = p + r$  (veja Fig. 3.8), temos  $p = -r$ . Como nesse caso  $f(0, r, -r) = 0$ , temos

$$f(q, r, p) = 2(q \cdot r) f'(r, -r) + \mathcal{O}(q^2), \quad (3.92)$$

onde

$$f'(r, -r) \equiv \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial (r + q)^2} f(q, r, -r - q). \quad (3.93)$$

Além disso, por invariância de Lorentz temos que  $f'(r, -r) = f'(r^2)$ .

Então, expandindo a Eq. (3.87) em torno de  $q = 0$ , obtemos a relação para o fator de forma  $\tilde{\mathcal{A}}_2^{\text{np}}$  análoga a Eq. (3.26) para o caso onde os polos estão presentes,

$$\tilde{\mathcal{A}}_2^{\text{np}}(r^2) = -2 \left[ i \frac{\partial}{\partial r^2} D^{-1}(r^2) + \tilde{C}'(r^2) \right], \quad (3.94)$$

onde usamos que

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial q^\mu} \tilde{C}(q, r, p) \right\}_{q=0} = 2r_\mu \tilde{C}'(r^2). \quad (3.95)$$

O argumento acima pode ser estendido diretamente para o caso do vértice de três glúons. Nesse caso, por simplificação, assumimos que, das cinco possíveis estruturas tensoriais de  $\tilde{C}_{\sigma\rho}$ , somente aquela proporcional a  $g_{\alpha\beta}$  desenvolve um polo em  $q^2$ ; em termo dos fatores de forma de  $\tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta}^{\mathbf{P}}$ , isso é equivalente a dizer que apenas  $\tilde{A}_1^{\mathbf{P}} \equiv \tilde{C}_1/q^2 \neq 0$ . Assim, a primeira identidade na Eq. (3.32) se torna

$$\tilde{A}_6^{\mathbf{np}}(r^2) = 2 \left[ \frac{\partial}{\partial r^2} \Delta^{-1}(r^2) - \tilde{C}'_1(r^2) \right], \quad (3.96)$$

onde

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial q^\mu} \tilde{C}_{\alpha\beta}(q, r, p) \right\}_{q=0} = 2r_\mu g_{\alpha\beta} \tilde{C}'_1(r^2). \quad (3.97)$$

Para obter um entendimento quantitativo de algumas dessas relações, realizou-se uma análise numérica assumindo algumas hipóteses simplificadoras [48]. Em particular, assumimos que a contribuição dos polos advindos de  $\tilde{\Gamma}_\mu^{\mathbf{P}}(q, r, p)$  e  $\tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta\gamma}^{\mathbf{P}, mnrs}(q, r, p, t)$  é suprimida com respeito àquela de  $\tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta}^{\mathbf{P}}(q, r, p)$  e, portanto, pode ser negligenciada. Adicionalmente, manteremos apenas a componente  $\tilde{C}_1$  de  $\tilde{C}_{\alpha\beta}$ , de maneira que a Eq. (3.89) resulta em

$$d\tilde{\Pi}^{(1)}(0) = 2g^2 C_A \int_k (d-1) k^2 \Delta^2(k^2) \tilde{C}'_1(k^2). \quad (3.98)$$

Então, na aproximação em que consideramos somente o bloco de diagramas da Fig. 3.4 na ESD do propagador de glúon, encontra-se (no espaço Euclideano)

$$\tilde{\Delta}^{-1}(0) = -2g^2 C_A \frac{d-1}{d} \int_k k^2 \Delta^2(k^2) \tilde{C}'_1(k^2), \quad (3.99)$$

ou, em coordenadas esféricas com  $k^2 = y$  e  $d = 4$ ,

$$\Delta^{-1}(0) = -\frac{3C_A \alpha_s}{8\pi} F(0) \int_0^\infty dy y^2 \Delta^2(y) \tilde{C}'_1(y), \quad (3.100)$$

onde utilizamos as Eqs. (2.23) e (3.67). Evidentemente, como  $\Delta^{-1}(0)$  é uma quantidade positiva, a função  $\tilde{C}'_1(y)$  deve ser tal que, quando inserida na Eq. (3.100), compense o sinal negativo geral.

Dado que, exceto pela consideração qualitativa acima, a forma precisa da função  $\tilde{C}'_1(y)$  é desconhecida, para prosseguir com nossa análise consideramos três possíveis modelos para descrever a sua forma funcional. As formas gerais das curvas são inspiradas pelas soluções obtidas a partir das equações de Bethe-Salpeter (BSE) que governam a formação

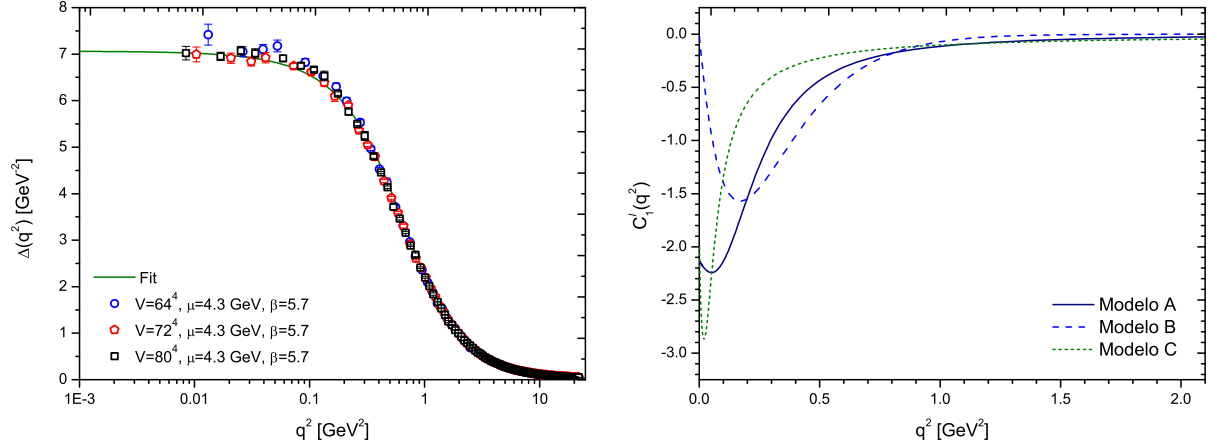


Figura 3.10: À esquerda: Os dados da rede (quenched) em SU(3) para o propagador de gluon,  $\Delta(q^2)$ , renormalizados em  $\mu = 4.3$  GeV (símbolos) e seu fit correspondente (linha contínua). À direita: As funções  $\tilde{C}'_1(y)$  correspondentes a: Modelo A com  $a = -9.21 \text{ GeV}^{-4}$ ,  $b = 0.94 \text{ GeV}^{-2}$ ,  $c = -0.47$ , Modelo B com  $a = -25.13 \text{ GeV}^{-2}$ ,  $b = 0.17 \text{ GeV}^2$  e Modelo C com  $a = -12.79 \text{ GeV}^{-2}$ ,  $b = 3.59 \text{ GeV}^{-1}$ ,  $c = -0.6$ ; as três curvas geram uma solução para a Eq. (3.100) quando o propagador de gluon da rede é utilizado.

de polos não massivos [62]. Em particular, usamos os seguintes modelos:

$$\tilde{C}'_1(y) = \begin{cases} 1/(ay^2 + by + c), & \text{Modelo A} \\ ay \exp(-y/b), & \text{Modelo B} \\ 1/(ay + b\sqrt{y} + c), & \text{Modelo C} \end{cases} \quad (3.101)$$

sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  parâmetros apropriados.

Para obter, então, possíveis soluções para  $\tilde{C}'_1(y)$ , utilizamos um *fit* para as simulações da rede do propagador de gluon (quenched) no gauge de Landau em SU(3) da Ref. [29]. No lado esquerdo da Fig. 3.10, mostramos o *fit* para o propagador de gluon (linha contínua), juntamente com os dados da rede (símbolos). No lado direito da Fig. 3.10, graficamos a função  $\tilde{C}'_1(y)$  obtida para cada modelo considerado, com os parâmetros dados na legenda da figura.

# Capítulo 4

## Excitações de estado ligado não massivas

Neste capítulo vamos analisar quais são as condições necessárias para que o fenômeno da geração de massa dinâmica para o gluon ocorra de fato na QCD. No Capítulo 3, vimos que o ingrediente essencial para que a geração de massa para o gluon se concretize, via o mecanismo de Schwinger, é a existência de polos não massivos nos vértices que entram na ESD que descreve o propagador de gluon. Embora esses polos se comportem como excitações de estado ligado sem massa e possam ser descritos através de uma BSE, sabemos que eles não fazem parte do espectro físico da QCD. Neste capítulo, estudaremos como tais polos podem ser descritos através do formalismo das BSE e verificaremos se de fato a dinâmica da QCD é forte o suficiente para viabilizar a formação dessas excitações sem massa. A análise apresentada aqui é uma extensão do estudo apresentado na Ref. [62]. Nesse estudo, derivou-se uma versão simplificada da BSE, onde somente foi levada em conta a contribuição dos diagramas gluônicos de um loop vestido para a BSE que controla a dinâmica do vértice de três gluons completo. Aqui, vamos aprimorar essa aproximação derivando, pela primeira vez na literatura, qual é a equação dinâmica que acopla aos polos gerados pelo vértice de três gluon os polos oriundos do vértice gluon-ghost.

### 4.1 Relação entre a massa dinâmica e os polos sem massa

Como vimos no Capítulo 3, o mecanismo de Schwinger é integrado à ESD do propagador de gluon pela estrutura dos vértices. Os vértices, então, passam a ser descritos pela Eq. (3.81) como a soma de uma parte sem polos, representada pelo sobrescrito **np**, e outra com polos, indicada pelo sobrescrito **p**. A invariância de gauge permanece intacta porque esses vértices satisfazem as mesmas identidades de Ward-Takahashi, mas agora com propagadores de gluon massivos.



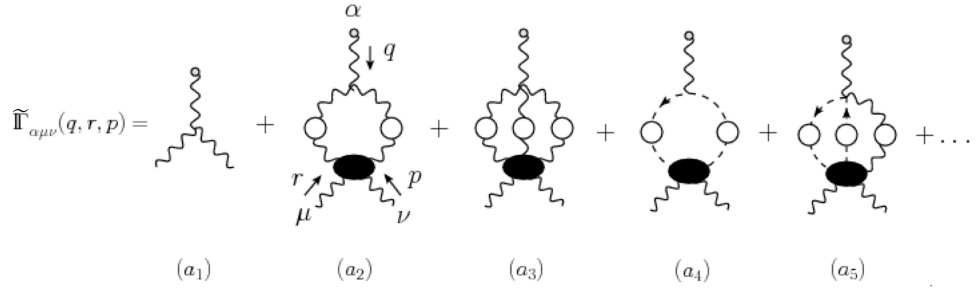


Figura 4.1: A ESD para o vértice de três glúons BQQ que conecta um glúon background com dois quânticos segundo o formalismo PT-BFM.

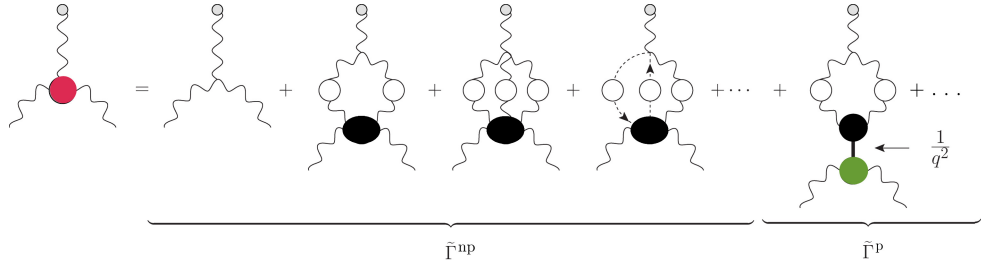


Figura 4.2: A ESD para o vértice de três glúons BQQ na presença de polos. Os primeiros diagramas (em amarelo) correspondem a expansão usual, enquanto o último termo (em verde) representa um estado ligado não perturbativo, que somente aparece quando o mecanismo de Schwinger é realizado.

Vamos estudar o caso específico do vértice de três glúon (BQQ), que tem a sua ESD representada na Fig. 4.1. Nesta figura, os círculos em brancos representam os propagadores completos de ghost e de glúon. Já as elipses em preto representam diferentes kernels de espalhamento. Note que esta figura representa o caso em que o mecanismo de Schwinger está desligado e, portanto, o propagador de glúon que aparece nos diagramas da Fig. 4.1 é não massivo.

Por outro lado, quando o mecanismo de Schwinger é ligado, a estrutura dos kernels é modificada pela presença de uma excitação não massiva, descrita por um propagador do tipo  $1/q^2$ . Do ponto de vista diagramático, essa excitação de estado ligado é representada por uma linha dupla (como no caso do vértice verde da Fig. 3.8). Essa excitação, então, afeta as ESDs dos vértices. No caso do nosso exemplo, a ESD para o vértice de três glúon mostrada na Fig 4.1 é modificada para aquela da Fig. 4.2, onde, agora, as linhas onduladas representam campos de glúon dotados de uma massa dinâmica. Note que na Fig. 4.2 somente mostramos o polo gerado pelo vértice de três glúons, mas as reticências representam outras possibilidades de polos que podem ser gerados a partir dos vértices de quatro glúons e glúon-ghost.

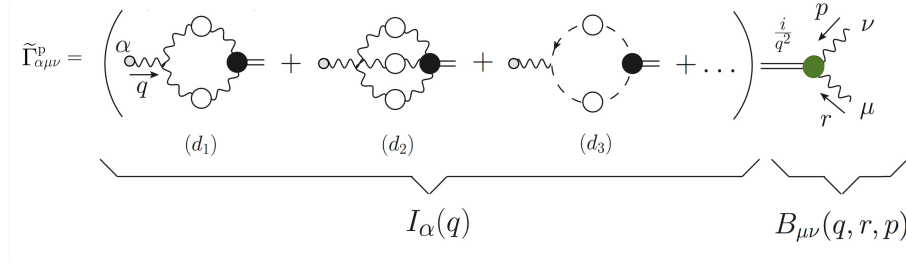


Figura 4.3: O vértice  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu}^{\mathbf{p}}(q, r, p)$  é composto de 3 ingredientes principais: a amplitude de transição,  $I_\alpha(q)$ , o propagador da excitação não massiva,  $i/q^2$ , e o vértice excitação-gluon,  $B_{\mu\nu}(q, r, p)$ .

Dessa forma, o vértice de três gluons pode ser escrito como

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu} = \tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu}^{\mathbf{np}} + \tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu}^{\mathbf{p}}. \quad (4.1)$$

Como a invariância de gauge é preservada, esse vértice satisfaz

$$q^\alpha \tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu}^{\mathbf{np}}(q, r, p) + q^\alpha \tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu}^{\mathbf{p}}(q, r, p) = i\Delta_{\mu\nu}^{-1}(r) - i\Delta_{\mu\nu}^{-1}(p), \quad (4.2)$$

onde  $\Delta^{-1}(q^2) = q^2 J(q^2) + m^2(q^2)$  é o inverso do propagador do gluon massivo. Esta relação nos leva a concluir que a parte do vértice que contém polos satisfaz a relação

$$q^\alpha \tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu}^{\mathbf{p}}(q, r, p) = m^2(r^2)P_{\mu\nu}(r) - m^2(p^2)P_{\mu\nu}(p), \quad (4.3)$$

onde utilizamos a Eq. (2.1) no gauge de Landau. Portanto, a existência dos polos está diretamente relacionada com a existência de uma massa dinâmica para o gluon.

Esquemáticamente, o vértice  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu}^{\mathbf{p}}(q, r, p)$  pode ser decomposto em três estruturas distintas, como mostra a Fig. 4.3. Dessa forma, é possível escrever  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu}^{\mathbf{p}}(q, r, p)$  como sendo

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu}^{\mathbf{p}}(q, r, p) = I_\alpha(q) \left( \frac{i}{q^2} \right) B_{\mu\nu}(q, r, p), \quad (4.4)$$

onde a função  $I_\alpha(q)$  é a amplitude de transição não perturbativa introduzida na Fig. 4.3 e  $B_{\mu\nu}(q, r, p)$  é o vértice efetivo que descreve a interação entre a excitação não massiva e os dois gluons. Observe que o diagrama  $(d_1)$  da Fig. 4.3 corresponde ao diagrama mostrado na parte com polos da Fig. 4.2. Os outros diagramas  $(d_2)$  e  $(d_3)$  foram omitidos na Fig. 4.2.

Em princípio, todos os demais vértices fundamentais da teoria também podem desenvolver polos, como vimos no Capítulo 3. Na ausência de quarks, os vértices restantes são o vértice gluon-ghost,  $\tilde{\Gamma}_\alpha$ , o vértice de quatro gluons,  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu\rho}$ , e o vértice de interação entre dois gluons e dois ghosts,  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\mu}$ , que é particular do formalismo PT-BFM. A partes dos vértices que contêm os polos em  $q^2$  são denominada pelo sobrescrito  $\mathbf{p}$  e podem ser

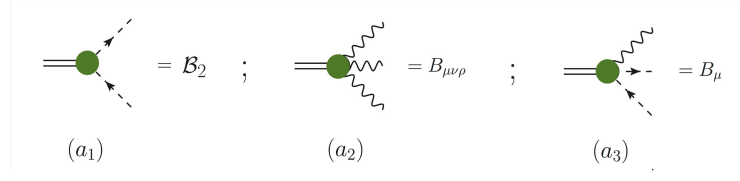


Figura 4.4: Os vários vértices que descrevem as interações:  $(a_1)$  excitação-ghost-ghost,  $\mathcal{B}_2$ ,  $(a_2)$  excitação-gluon-gluon-gluon,  $B_{\mu\nu\rho}$ , e  $(a_3)$  excitação-gluon-ghost-ghost,  $B_\mu$ .

escritas como

$$\tilde{\Gamma}_\alpha^{\mathbf{p}} = I_\alpha \left( \frac{i}{q^2} \right) \mathcal{B}_2; \quad \tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu\rho}^{\mathbf{p}} = I_\alpha \left( \frac{i}{q^2} \right) B_{\mu\nu\rho}; \quad \tilde{\Gamma}_{\alpha\mu}^{\mathbf{p}} = I_\alpha \left( \frac{i}{q^2} \right) B_\mu, \quad (4.5)$$

onde os vértices efetivos  $\mathcal{B}_2$ ,  $B_{\mu\nu\rho}$  e  $B_\mu$  descrevem as interações entre a excitação não massiva e dois ghosts, a excitação e três gluons e a excitação e dois ghosts e um gluon, respectivamente. Tais vértices estão representados na Fig. 4.4.

Em particular, o vértice  $B_{\mu\nu}(q, r, p)$  tem sua estrutura de Lorentz dada por

$$B_{\mu\nu}(q, r, p) = B_1 g_{\mu\nu} + B_2 q_\mu q_\nu + B_3 p_\mu p_\nu + B_4 r_\mu q_\nu + B_5 r_\mu p_\nu, \quad (4.6)$$

onde os  $B_i$  são os fatores de forma desse vértice, que podem ser determinados através de um BSE homogênea que  $B_{\mu\nu}$  satisfaz [62]. Note que, por simetria de Bose com respeito as transformações  $\mu \leftrightarrow \nu$  e  $p \leftrightarrow r$ , devemos ter que os fatores de forma

$$B_{1,2}(q, r, p) = -B_{1,2}(q, p, r), \quad (4.7)$$

o que implica em

$$B_{1,2}(0, -p, p) = 0. \quad (4.8)$$

Além disso, contraindo a identidade de Takahashi para  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu}^{\mathbf{p}}$ , dada pela Eq. (4.3), com dois projetores transversos,  $P^{\mu'\mu}(r)P^{\nu'\nu}(p)$ , obtém-se

$$P^{\mu'\mu}(r)P^{\nu'\nu}(p)q^\alpha \tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu}^{\mathbf{p}}(q, r, p) = [m^2(r^2) - m^2(p^2)]P_{\sigma}^{\mu'}(r)P^{\sigma\nu'}(p). \quad (4.9)$$

Por outro lado, contraindo a expansão do vértice  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu}^{\mathbf{p}}$ , dada pelas Eqs. (4.4) e (4.6), com os mesmo projetores, encontra-se

$$q^\alpha P^{\mu'\mu}(r)P^{\nu'\nu}(p)q^\alpha \tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu}^{\mathbf{p}}(q, r, p) = iI(q)[B_1 g_{\mu\nu} + B_2 q_\mu q_\nu]P^{\mu'}(r)P^{\nu'}(p), \quad (4.10)$$

onde definimos

$$I(q) = \frac{q^\alpha I_\alpha(q)}{q^2}$$

e utilizamos o fato de que os termos proporcionais a  $B_3$ ,  $B_4$  e  $B_5$  se anulam ao serem

contraídos com os projetores  $P^{\mu'\mu}(r)P^{\nu'\nu}(p)$ . Assim, inserindo a Eq. (4.10) na Eq. (4.9), chega-se às relações

$$iI(q)B_1(q, r, p) = m^2(r^2) - m^2(p^2), \quad B_2(q, r, p) = 0. \quad (4.11)$$

Podemos realizar uma expansão de Taylor em ambos os lados da primeira equação de (4.11) no limite em que o momento do gluon é zero, *i.e.*  $q \rightarrow 0$ . Utilizando a Eq. (4.8), obtemos que a expansão de Taylor do fator de forma  $B_1$  é dada por

$$B_1(q, -p - q, p) = [2(q \cdot p) + q^2]B_1'(-p, p) + 2(q \cdot p)^2 B_1''(-p, p) + \mathcal{O}(q^3), \quad (4.12)$$

onde a linha representa a derivada com respeito a  $(p + q)^2$  no limite  $q \rightarrow 0$ , ou seja,

$$B_1'(-p, p) = \lim_{q \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial B_1(q, -p - q, p)}{\partial (p + q)^2} \right\}. \quad (4.13)$$

Realizando a expansão correspondente no lado direito da Eq. (4.11), temos

$$m^2(r^2) - m^2(p^2) = 2(q \cdot p) [m^2(p^2)]' + \mathcal{O}(q^2), \quad (4.14)$$

onde usamos que  $r = -(p + q)$ . Assumindo que  $I(0)$  é finito e igualando os coeficientes de  $(q \cdot p)$ , chegamos a relação

$$[m^2(p)]' = iI(0)B_1'(p), \quad (4.15)$$

o que implica que o fator de forma do vértice efetivo  $B_{\mu\nu}$  relevante para estudar a geração de massa para o gluon é  $B_1$ , pois, se  $B_1'(p) = 0$  trivialmente, não temos geração de massa dinâmica para o gluon.

## 4.2 Sistema de equações dinâmicas dos polos

Queremos, agora, derivar a equação dinâmica para a quantidade  $B_{\mu\nu}$  que aparece na Fig 4.3. Para isso, começamos com a BSE do vértice de três gluons,  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu}(q, r, p)$ , representada na Fig. 4.5. Note que, diferente da ESD da Fig. 4.1, os vértices onde o gluon de background entra (carregando momento  $q$ ) são completamente vestidos. Como consequência, os kernels que aparecem na Fig. 4.5 são diferentes daqueles da ESD da Fig. 4.1.

A metodologia geral para isolar a equação dinâmica de  $B_{\mu\nu}$  da BSE apresentada na Fig. 4.5 foi exposta em [63,64]. Especificamente, separa-se, em ambos os lados da equação, cada vértice em duas partes, uma parte “regular” e outra contendo um polo em  $q^2$  (como na Fig. 3.8). Assim, a BSE para  $B_{\mu\nu}$  é obtida simplesmente igualando as partes que

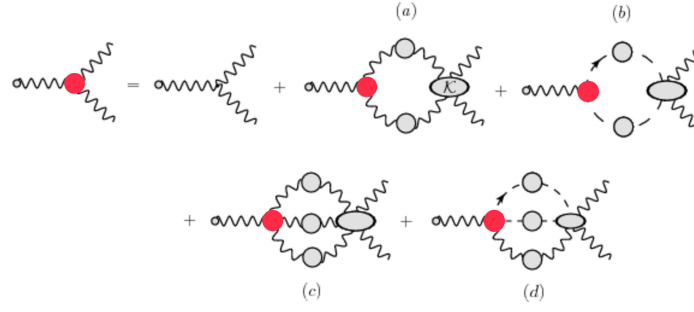


Figura 4.5: BSE completa para o vértice de três gluons  $\Gamma_{\alpha\mu\nu}(q, r, p)$ .

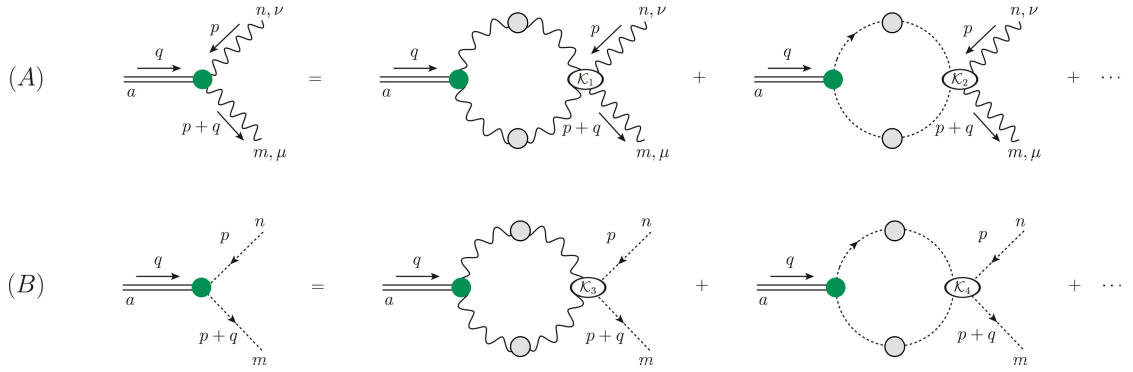


Figura 4.6: Sistema acoplado para  $B_{\mu\nu}$  e  $\mathcal{B}_2$ : (A) BSE para a função de onda de estado ligado  $B_{\mu\nu}$ ; (B) BSE para a função de onda de estado ligado  $\mathcal{B}_2$ .

contém o polo em ambos os lados.

Contudo, o processo acima descrito leva a uma estrutura bastante complicada e, por isso, será necessário fazer algumas aproximações. Para isso, em [62], considerou-se apenas o diagrama (a) da Fig. 4.5. Aqui, vamos acrescentar a contribuição do diagrama (b), considerando a existência de um polo sem massa no vértice gluon-ghost. Com isso, a BSE de  $B_{\mu\nu}$  é dada na linha (A) da Fig. 4.6, onde as reticências representam os termos desprezados, referentes aos diagramas (c) e (d) da Fig. 4.5.

Matematicamente, então, podemos escrever a BSE para  $B_{\mu\nu}^{amn}$  mostrada na linha (A) da Fig. 4.6 como

$$B_{\mu\nu}^{amn} = \int_k B_{\alpha\beta}^{abc} \Delta_{br}^{\alpha\rho}(k+q) \Delta_{cs}^{\beta\sigma}(k) \mathcal{K}_{1\sigma\nu\mu\rho}^{snmr} + \int_k \mathcal{B}_2^{abc} D^{br}(k+q) D^{cs}(k) \mathcal{K}_{2\nu\mu}^{snmr}, \quad (4.16)$$

onde os kernels  $\mathcal{K}_1$  e  $\mathcal{K}_2$  foram aproximados para o conjunto de diagramas da Fig. 4.7, em que os vértices são nus e os propagadores de gluon interno são completamente vestidos. Observe que o diagrama ( $a_1$ ) da Fig. 4.7 não contribui para a BSE, pois a estrutura de cor do vértice de quatro gluons em nível de árvore se anula quando contraída com o fator de cor  $f^{abc}$  de  $B_{\alpha\beta}$ . Já os diagramas ( $a_2$ ) e ( $a_3$ ) da Fig. 4.7 são iguais e multiplicados por um fator de 1/2, o que também ocorre para os diagramas que aparecem do lado direito

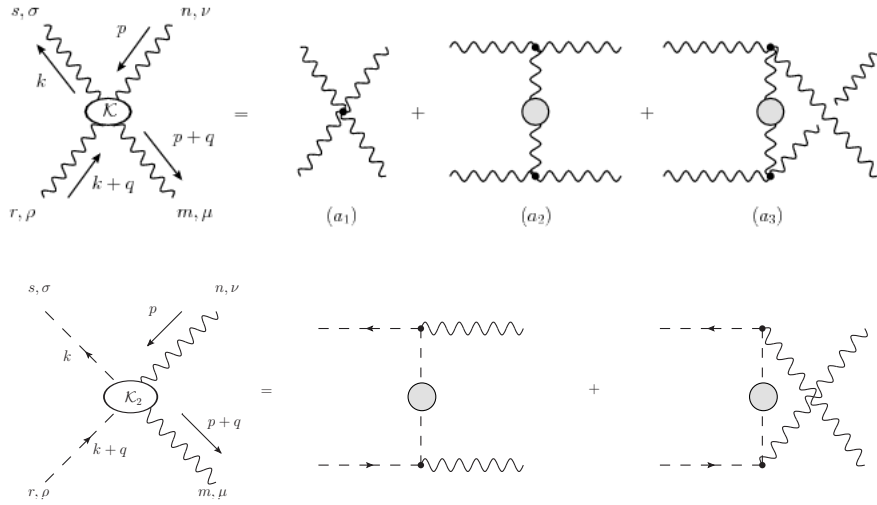


Figura 4.7: Acima: Kernel  $\mathcal{K}_1$  contribuindo para  $B_{\mu\nu}$ . Abaixo: Kernel  $\mathcal{K}_2$  contribuindo para  $B_{\mu\nu}$ . Os vértices de interação são aproximados pelos seus valores em nível de árvore, enquanto os propagadores de gluon internos são completamente vestidos.

do painel inferior da Fig. 4.7. Dessa forma, os kernels  $\mathcal{K}_1$  e  $\mathcal{K}_2$  são dados por

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{1\sigma\nu\mu\rho}^{snmr}(-k, p, -p-q, k+q) &= -ig^2 f^{sne} f^{emr} \Gamma_{\sigma\gamma\nu}^{(0)} \Delta^{\gamma\lambda}(k-p) \Gamma_{\mu\lambda\rho}^{(0)}, \\ \mathcal{K}_{2\nu\mu}^{snmr}(k, p, p+q, k+q) &= -ig^2 f^{sne} f^{emr} k_\nu D(k-p)(k-p)_\mu.\end{aligned}\quad (4.17)$$

A quantidade  $\mathcal{B}_2^{abc}$ , que aparece na Eq. (4.16), foi introduzida na Fig. 4.4 e representa o vértice que descreve a interação entre o estado ligado sem massa com dois ghost. O vértice  $\mathcal{B}_2^{abc}$  também possui a sua própria BSE, que deriva da BSE para o vértice gluon-ghost, formando assim um sistema acoplado de equações, conforme representado na linha (B) da Fig. 4.6. A equação para  $\mathcal{B}_2^{abc}$  será estudada mais adiante.

Focando primeiro na equação para o vértice  $B_{\mu\nu}$ , podemos substituir os kernels da Eq. (4.17) na Eq. (4.16) e, após contrair os fatores de cor, obtemos que

$$B_{\mu\nu}(p, q) = I_{\mu\nu}(p, q) + \mathcal{I}_{\mu\nu}(p, q), \quad (4.18)$$

onde

$$\mathcal{I}_{\mu\nu}(p, q) = -2\pi i \alpha_s C_A \int_k B_{\alpha\beta} \Delta^{\alpha\rho}(k+q) \Delta^{\beta\sigma}(k) \Delta^{\gamma\lambda}(k-p) \Gamma_{\sigma\gamma\nu}^{(0)} \Gamma_{\mu\lambda\rho}^{(0)}, \quad (4.19)$$

$$I_{\mu\nu}(p, q) = -2\pi i \alpha_s C_A \int_k \mathcal{B}_2 D(k+q) D(k) D(k-p) k_\nu (k-p)_\mu. \quad (4.20)$$

Como estamos interessados em estudar a possibilidade de que  $B'_1$  seja não nulo quando o momento do gluon é zero, *i.e.*  $q \rightarrow 0$ , utilizamos a expansão de Taylor para  $B_1$  dada na Eq. (4.12). O mesmo deve ser feito para  $\mathcal{B}_2$ , cuja expansão de Taylor em  $q \rightarrow 0$  é dada

por

$$\mathcal{B}_2(q, -p - q, p) = 2(q \cdot p) \mathcal{B}'_2(-p, p) + \mathcal{O}(q^2), \quad (4.21)$$

onde o primeiro termo da expansão é zero devido a antissimetria de  $\mathcal{B}_2$  que deriva da antissimetria pela troca de pernas de ghost. Note que a linha, aqui novamente, representa a derivada com relação a  $(p + q)^2$  no limite  $q \rightarrow 0$ , *i.e.*,

$$\mathcal{B}'_2(-p, p) = \lim_{q \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial \mathcal{B}_2(q, -p - q, p)}{\partial (p + q)^2} \right\}. \quad (4.22)$$

Com isso, podemos contrair ambos os lados da Eq. (4.18) com o projetor transverso  $P^{\mu\nu}(p)$  e, usando os termos de primeira ordem em  $q$  das expansões de Taylor dadas pelas Eqs. (4.12) e (4.21), chegamos a

$$\begin{aligned} B'_1(p) = & - \frac{2\pi i}{3} \alpha_s C_A \int_k B'_1(k) \Delta^2(k) \Delta(k - p) \mathcal{N}_1(p, k) \\ & - \frac{2\pi i}{3} \alpha_s C_A \int_k \mathcal{B}'_2 D^2(k) D(k - p) \frac{(p \cdot k)[p^2 k^2 - (p \cdot k)^2]}{p^4}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde definimos

$$\mathcal{N}_1(p, k) = \frac{4(p \cdot k)[p^2 k^2 - (p \cdot k)^2]}{p^4 k^2 (k - p)^2} [8p^2 k^2 - 6(p \cdot k)(p^2 + k^2) + 3(p^4 + k^4) + (p \cdot k)^2]. \quad (4.24)$$

Ao derivar a Eq. (4.23), usamos o fato de que, ao contrair  $P^{\mu\nu}(p)$  com  $B_{\mu\nu}(q, -p - q, p)$ , dado pela Eq. (4.6), sobrevivem apenas os termos proporcionais aos fatores de forma  $B_1$ ,  $B_2$  e  $B_4$ , mas o termo proporcional a  $B_4$  possui ordem de  $q^2$  e foi desprezado na expansão de Taylor, já  $B_2$  é nulo, como demonstrado na Eq. (4.11).

Note que o segundo termo no lado direito da Eq. (4.23) envolve o fator de forma  $\mathcal{B}_2$ , que descreve a interação da excitação não massiva com dois ghosts e cuja equação dinâmica está representada na linha (B) da Fig. 4.6. Essa a BSE para o vértice  $\mathcal{B}_2^{amn}$  pode ser escrita como

$$\mathcal{B}_2^{amn} = \int_k B_{\alpha\beta}^{abc} \Delta_{br}^{\alpha\rho}(k + q) \Delta_{cs}^{\beta\sigma}(k) \mathcal{K}_{3\sigma\rho}^{snmr} + \int_k \mathcal{B}_2^{abc} D^{br}(k + q) D^{cs}(k) \mathcal{K}_4^{snmr}, \quad (4.25)$$

onde a aproximação para os kernels está representada diagramaticamente na Fig. 4.8. Novamente, os dois diagramas do lado direito do painel superior da Fig. 4.8 são iguais e apresentam um fator de  $1/2$ , o que nos leva a

$$\mathcal{K}_{3\sigma\rho}^{snmr}(k, p, p + q, k + q) = -ig^2 f^{sne} f^{emr} (p - k)_\sigma D(p - k)(p + q)_\rho, \quad (4.26)$$

$$\mathcal{K}_4^{snmr}(k, p, p + q, k + q) = -ig^2 f^{sne} f^{emr} k_\gamma \Delta^{\gamma\lambda}(k - p)(p + q)_\lambda. \quad (4.27)$$

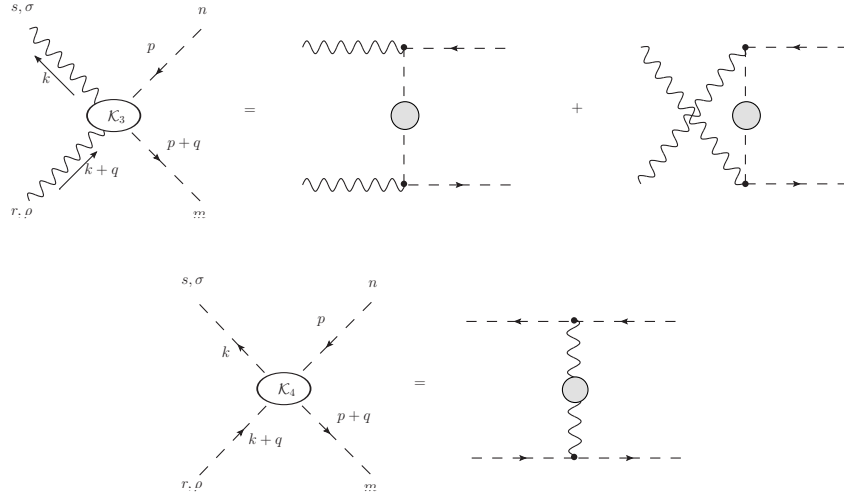


Figura 4.8: Acima: Kernel  $\mathcal{K}_3$  contribuindo para  $\mathcal{B}_2$ . Abaixo: Kernel  $\mathcal{K}_4$  contribuindo para  $\mathcal{B}_2$ . Os vértices de interação são aproximados pelos seus valores em nível de árvore, enquanto os propagadores de gluon internos são completamente vestidos.

Contraindo os fatores de cor da Eq. (4.25), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2 = & -2\pi i\alpha_s C_A \int_k B_{\alpha\beta} \Delta^{\alpha\rho}(k+q) \Delta^{\beta\sigma}(k) D(p-k)(p-k)_\sigma (p+q)_\rho \\ & -\pi i\alpha_s C_A \int_k \mathcal{B}_2 D(k+q) D(k) \Delta^{\gamma\lambda}(k-p) k_\gamma (p+q)_\lambda. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Como queremos formar um sistema acoplado com a Eq. (4.23), tomaremos novamente o limite  $q \rightarrow 0$  na Eq. (4.28). Para isso, precisamos dos seguintes limites obtidos através das Eqs. (4.12) e (4.21),

$$\mathcal{B}_2(k, q) \rightarrow 2(q \cdot k) \mathcal{B}'_2(k) \quad \text{e} \quad B_{\alpha\beta}(k, q) \rightarrow g_{\alpha\beta} [2(q \cdot k) B'_1(k)]. \quad (4.29)$$

Assim, é possível mostrar que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}'_2(p) = & -2\pi i\alpha_s C_A \int_k B'_1(k) \Delta^2(k) D(p-k) \frac{(p \cdot k)}{p^2} \left[ \frac{k^2 p^2 - (k \cdot p)^2}{k^2} \right] \\ & -\pi i\alpha_s C_A \int_k \mathcal{B}'_2(k) D^2(k) \Delta(k-p) \frac{(p \cdot k) [k^2 p^2 - (p \cdot k)^2]}{p^2 (k-p)^2}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Desta forma, chegamos ao seguinte sistema de equações integrais acopladas para  $B'_1$  e  $\mathcal{B}'_2$ ,



formado pelas Eqs. (4.23) e (4.30),

$$\begin{aligned}
B'_1(p) &= -\frac{2\pi i}{3}\alpha_s C_A \int_k B'_1(k) \Delta^2(k) \Delta(k-p) \mathcal{N}_1(p, k) \\
&\quad - \frac{2\pi i}{3}\alpha_s C_A \int_k \mathcal{B}'_2 D^2(k) D(k-p) \frac{(p \cdot k)[p^2 k^2 - (p \cdot k)^2]}{p^4}, \\
\mathcal{B}'_2(p) &= -2\pi i \alpha_s C_A \int_k B'_1(k) \Delta^2(k) D(p-k) \frac{(p \cdot k)}{p^2} \left[ \frac{k^2 p^2 - (k \cdot p)^2}{k^2} \right] \\
&\quad - \pi i \alpha_s C_A \int_k \mathcal{B}'_2(k) D^2(k) \Delta(k-p) \frac{(p \cdot k)[k^2 p^2 - (p \cdot k)^2]}{p^2 (k-p)^2}, \tag{4.31}
\end{aligned}$$

onde  $\mathcal{N}_1(p, k)$  foi definido na Eq. (4.24).

### 4.3 Espaço Euclideano

Antes de começar a análise numérica, é necessário converter o sistema da Eqs. (4.31), que está no espaço de Minkowski, para o espaço Euclideano. Para isso, utilizamos as regras usuais de conversão, ou seja,

$$\begin{aligned}
p^2 &\rightarrow -p_E^2; & k^2 &\rightarrow -k_E^2; & (p \cdot k) &\rightarrow -(p_E \cdot k_E); \\
\int_k &\rightarrow i \int_{k_E}; & \Delta(k^2) &\rightarrow -\Delta(-k_E^2); & D(k^2) &\rightarrow -D(-k_E^2), \tag{4.32}
\end{aligned}$$

e, adicionalmente,

$$B'_1(k^2) \rightarrow B'_1(-k_E^2); \quad \mathcal{B}'_2(k^2) \rightarrow \mathcal{B}'_2(-k_E^2). \tag{4.33}$$

Além disso, é conveniente utilizar o sistema de coordenadas esféricas, onde

$$\int_{k_E} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk_E^2 k_E^2 \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta. \tag{4.34}$$

Ademais, vamos introduzir as seguintes variáveis:  $x \equiv p_E^2$ ,  $y \equiv k_E^2$  e  $z \equiv (k_E + p_E)^2$ , *i.e.*  $z = x + y + 2\sqrt{xy} \cos \theta$ . Com isso, o sistema da Eq. (4.31) no espaço Euclideano é dado por

$$\begin{aligned}
B'_1(x) &= -\frac{\alpha_s C_A}{12\pi^2} \int_0^\infty dy y B'_1(y) \Delta^2(y) \sqrt{\frac{y}{x}} \int_0^\pi d\theta \sin^4 \theta \cos \theta \mathcal{N}_1^E(x, y, z) \Delta(z) \\
&\quad - \frac{\alpha_s C_A}{12\pi^2} \int_0^\infty dy y^2 \mathcal{B}'_2(y) D^2(y) \sqrt{\frac{y}{x}} \int_0^\pi d\theta \sin^4 \theta \cos \theta D(z), \\
\mathcal{B}'_2(x) &= -\frac{\alpha_s C_A}{4\pi^2} \sqrt{x} \int_0^\infty dy y^{\frac{3}{2}} B'_1(y) \Delta^2(y) \int_0^\pi d\theta \sin^4 \theta \cos \theta D(z) \\
&\quad - \frac{\alpha_s C_A}{8\pi^2} \sqrt{x} \int_0^\infty dy y^{\frac{5}{2}} \mathcal{B}'_2(y) D^2(y) \int_0^\pi d\theta \sin^4 \theta \cos \theta \frac{\Delta(z)}{z}, \tag{4.35}
\end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{N}_1^E(x, y, z) = z + 10(x + y) + \frac{1}{z}(x^2 + y^2 + 10xy). \quad (4.36)$$

Note que o sistema da Eq. (4.35) é, então, o sistema de equações integrais homogêneas acopladas que descreve a dinâmica dos polos associados ao vértice de três gluons e ao vértice gluon-ghost no espaço Euclidiano.

Da Eq. (4.35), temos, claramente, que no limite em que  $x \rightarrow 0$ ,

$$\mathcal{B}'_2(0) = 0. \quad (4.37)$$

Podemos obter  $B'_1(x)$  no mesmo limite, para isso, usamos que em torno de  $x = 0$ ,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + y} \left[ 1 - 2 \frac{\sqrt{xy}}{x + y} \cos \theta \right], \quad (4.38)$$

juntamente com a expansão de Taylor para o propagador de gluon  $\Delta(z)$ , dada por

$$\Delta(k + p) = \Delta(k) + [2(p \cdot k) + p^2] \Delta'(k) + 2(p \cdot k)^2 \Delta''(k) + \mathcal{O}(q^3), \quad (4.39)$$

onde, novamente, a linha se refere a derivada com respeito a  $(k + p)^2$  no limite em que  $p \rightarrow 0$ . A partir das Eq. (4.38) e (4.39), obtemos

$$B'_1(0) = -\frac{\alpha_s C_A}{8\pi} \int_0^\infty dy y^3 B'_1(y) \Delta^2(y) \Delta'(y) - \frac{\alpha_s C_A}{8\pi} \frac{1}{12} \int_0^\infty dy y^3 \mathcal{B}'_2(y) D^2(y) D'(y), \quad (4.40)$$

que é não nulo.

## 4.4 Solução numérica

Antes de partirmos para a análise numérica propriamente dita, discutiremos algumas características gerais do sistema de equações acopladas dado pela Eq. (4.35). Primeiramente, observe que esse sistema é composto por duas equações integrais homogêneas acopladas. Note que esse tipo de sistema possui as seguintes características:

- A solução trivial para  $B'_1$  e  $\mathcal{B}'_2$  é sempre uma possível solução do sistema;
- Se  $B'_1$  e  $\mathcal{B}'_2$  são soluções não triviais, a homogeneidade da equação nos garante que  $cB'_1$  e  $c\mathcal{B}'_2$  também serão soluções, onde  $c$  é uma constante qualquer;
- Em realidade, a Eq. (4.35) é um problema de autovalor e autovetor acoplado, pois veremos que existem soluções não triviais para os “autovetores”  $B'_1$  e  $\mathcal{B}'_2$  somente quando o “autovalor”  $\alpha_s$  assume valores muito bem determinados.

Infelizmente, a solução numérica completa da Eq. (4.35) está além dos nossos alcances neste momento. Por esse motivo, vamos apresentar um análise aproximada do impacto

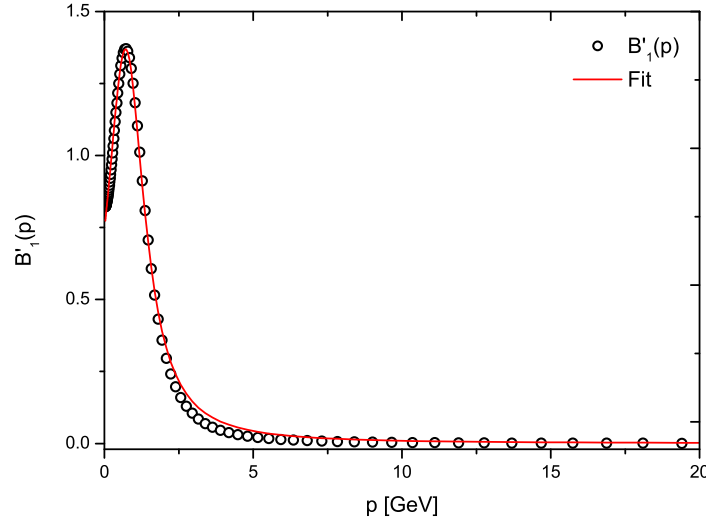


Figura 4.9: A solução numérica para a função  $B'_1(p)$  quando  $\alpha_s(\mu) = 0.27$  para  $\mu = 4.3$  GeV. O fit apropriado obtido foi  $B'_1(p) = 1/(ap^2 + bp + c)$  com  $a = 1.22 \text{ GeV}^{-2}$ ,  $b = -1.73 \text{ GeV}^{-1}$ ,  $c = 1.35$ .

que o fator de forma  $\mathcal{B}'_2$  causa na formação dos estados ligados sem massa. Para isso, apresentaremos primeiramente a solução numérica obtida quando  $\mathcal{B}'_2 = 0$ . Para tanto, utilizaremos na primeira equação de (4.35), o fit para o propagador do glúon, renormalizado na escala de  $\mu = 4.3$  GeV, que foi apresentado na Fig. 3.10. Nessa aproximação, encontramos que a primeira solução não trivial para  $B'_1(p)$  ocorre quando  $\alpha_s(\mu) = 0.27$ , que é um valor relativamente um pouco mais alto que o valor de  $\alpha_s(\mu) = 0.22$  usualmente empregado nas últimas análises da ESD [65] e determinado em cálculos de  $\alpha_s(\mu)$  em quarta ordem em teoria de perturbação [66].

Na Fig. 4.9 os círculos representam a solução para  $B'_1(p)$ . Podemos observar que  $B'_1(p)$  possui um pico localizado na região de 0.73 GeV e depois tende a zero no limite UV. A função obtida para  $B'_1(p)$  pode ser reproduzida razoavelmente bem com a seguinte forma funcional

$$B'_1(p) = \frac{1}{ap^2 + bp + c}, \quad (4.41)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes, cujos valores encontram-se na legenda da Fig. 4.9.

Note que esse fit possui a mesma forma do Modelo C para  $\tilde{C}'_1(y)$  na Eq. (3.101), já que lá  $y$  representa o momento ao quadrado. Isso ocorre porque a função  $\tilde{C}'_1(y)$  está relacionada a parte do vértice de três glúons que contém polo, como foi mostrado nas Eqs. (3.82) e (3.97). Embora tenhamos um sinal global diferente, entre o Modelo C e a Eq. (4.41), esse sinal pode ser reabsorvido devido a homogeneidade da BSE da Eq. (4.35). Assim, podemos dizer que alguns modelos apresentado na Eq.(3.100) foram inspirados pelas soluções obtidas da BSE que governa a formação de polos não massivos na Ref. [62].

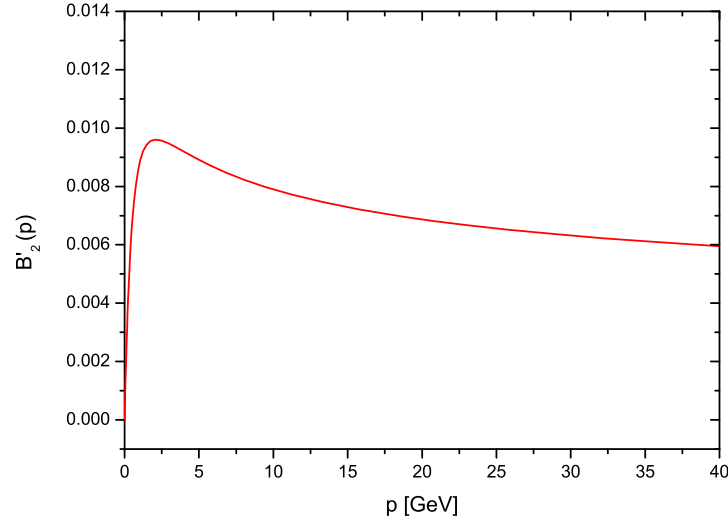


Figura 4.10: Estimativa de  $\mathcal{B}'_2(p)$  utilizando o fit da Eq. (4.41) na segunda equação integral de (4.35).

Embora não saibamos qual é o impacto que a inclusão do termo contendo  $\mathcal{B}'_2$  possa causar na forma de  $B'_1(p)$  mostrada na Fig. (4.9), é possível que seu efeito provoque uma diminuição no valor da constante de acoplamento.

Para tentar obter uma ideia qualitativa do tamanho da contribuição de  $\mathcal{B}'_2$  para  $B'_1$ , tomamos a segunda equação do sistema (4.35), eliminamos o segundo termo do lado direito dessa equação e utilizamos o fit para  $B'_1$  da Eq. (4.41). A solução numérica para  $\mathcal{B}'_2$ , nesse contexto, encontra-se na Fig. 4.10. Apesar dessa aproximação ser bastante drástica, observe que a contribuição de  $\mathcal{B}'_2$  nesse caso é muito pequena, o que indica que a inclusão do termo  $\mathcal{B}'_2$  no cálculo de  $B'_1$  não deve impedir a formação do polo no vértice de três glúons.

# Capítulo 5

## Efeitos da divergência dos loops de ghost

No Capítulo 3, vimos que o gluon adquire uma massa dinâmica não perturbativamente. Contudo, o mesmo não ocorre para os campos de ghost. Neste Capítulo, então, discute-se quais as consequências da massa nula do ghost em algumas das funções de Green da QCD, em particular no propagador de gluon e no vértice de três gluons. Os loops de ghost que contribuem para as funções de Green em questão (veja, por exemplo, os diagramas  $(a_3)$  e  $(a_4)$  da Fig. 2.5 para o caso do propagador de gluon e a Fig. 4.1 para o vértice) apresentam uma divergência infravermelha semelhante àquelas encontradas no tratamento perturbativo, enquanto que as divergências dos loops de gluon são sanadas devido a geração de uma massa efetiva para o gluon na região não perturbativa. Veremos que essa divergência não interfere na finitude do propagador de gluon na região IR, mas provoca algumas mudanças qualitativas em seu comportamento. Além disso, veremos que um fator de forma especial do vértice de três gluon também é afetado por essa massa nula dos campos de ghost.

Para verificar esses efeitos qualitativamente, começamos com um modelo simplificado inspirado em teoria de perturbação de um loop. Em seguida, mostramos a análise não perturbativa completa na aproximação quenched (ou seja, onde os campos de quarks são omitidos), como já havia sido feito em [32]. Nossa contribuição será a análise de como a adição dos campos de quarks afetam os resultados obtidos anteriormente dentro do contexto deste modelo simplificado.

### 5.1 Considerações Gerais

Vimos anteriormente que o propagador do gluon é finito na região IR. Esse comportamento é explicado pela geração dinâmica de massa do gluon [18, 27], que surge a partir da análise da ESD do propagador de gluon, conforme estudado no Capítulo 3. Como vimos,

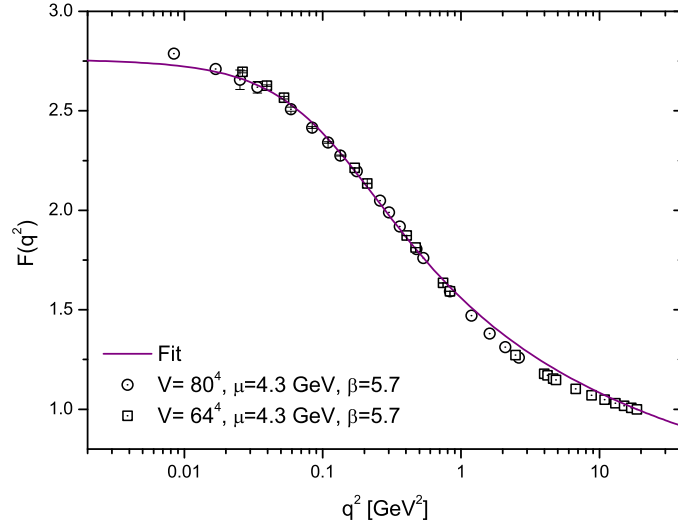


Figura 5.1: Dados da rede para a função de dressing do ghost,  $F(q^2)$ , obtidos pela Ref. [6] juntamente com o fit (linha contínua roxa) utilizado na Ref. [11].

a representação diagramática da ESD para o gluon no formalismo PT-BFM é dada pela Fig. 2.5 (na aproximação quenched). Nota-se que os diagramas  $(a_3)$  e  $(a_4)$  incluem o propagador de ghost,  $D(q^2)$ , que foi definido em termos da função de dressing  $F(q^2)$  na Eq. (2.21). Por conveniência, repetimos esta definição aqui:

$$D(q^2) = i \frac{F(q^2)}{q^2}. \quad (5.1)$$

Estudos da QCD na rede e das ESDs em SU(3) e SU(2) [4–6, 8, 11] revelam que  $F(q^2)$  é finita no IR (Fig. 5.1). Com isso, o propagador  $D(q^2)$  diverge quando  $q^2 \rightarrow 0$ , dado que o ghost permanece não massivo. Assim, as contribuições dos diagramas  $(a_3)$  e  $(a_4)$  da Fig. 2.5 possuem um termo divergente.

Neste capítulo, então, queremos observar os efeitos da divergência do propagador de ghost em algumas funções de Green da QCD. Em particular, focaremos no propagador de gluon e no vértice de três gluons. Para isso, utilizaremos a aproximação apresentada na Eq. (2.29),  $1 + G(q^2) = F^{-1}(q^2)$ .

## 5.2 Toy Model

Para entender qualitativamente os efeitos gerados por essa divergência, começamos analisando um toy model inspirado em teoria de perturbação em 1-loop. Neste modelo, inserimos uma massa “dura” para o gluon, ou seja, uma massa que não depende do momento. Como foi amplamente discutido no Capítulo 3, a inclusão de uma massa “dura”

viola a invariância de gauge da teoria, mas o modelo serve para observarmos, dentro de um contexto simplificado, quais são os efeitos gerais que essa massa gera nas funções de Green da teoria.

Dentro do nosso toy model, o propagador do gluon é dado por

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}(q^2) &= q^2 J(q^2) + m^2 \\ &= q^2 [1 + c_1 J_{a_1}(q^2) + c_2 J_{a_3}(q^2)] + m^2,\end{aligned}\quad (5.2)$$

onde os termos cinéticos são determinados pelos resultados perturbativos em um loop da Fig. 2.5, de maneira que em 4 dimensões as contribuições dos diagramas  $(a_1)$  e  $(a_3)$  são da forma

$$\begin{aligned}J_{a_1}(q^2) &\sim \ln[(q^2 + m^2)/\mu^2], \\ J_{a_3}(q^2) &\sim \ln(q^2/\mu^2),\end{aligned}\quad (5.3)$$

sendo  $\mu$  a escala de renormalização da teoria. Os valores das constantes reais  $c_1$  e  $c_2$  são fixados de forma a obter o bem conhecido comportamento perturbativo da QCD. Em particular, para 4 dimensões, são dadas por

$$c_1 = 2 \left( \frac{\alpha_s C_A}{4\pi} \right); \quad c_2 = \frac{1}{6} \left( \frac{\alpha_s C_A}{4\pi} \right). \quad (5.4)$$

Nota-se que a massa  $m$  que aparece dentro do argumento do logaritmo de  $J_{a_1}(q^2)$  dado na Eq. (5.3) impede que esse termo divirja quando  $q^2 \rightarrow 0$ . No caso de  $J_{a_3}(q^2)$ , porém, não temos essa proteção. Contudo, a presença de um logaritmo sem massa na Eq. (5.2) não interfere na finitude do propagador  $\Delta(q^2)$  na região de baixos momentos, já que esse logaritmo desprotegido está multiplicado por  $q^2$ , o que torna o limite IR de  $\Delta(q^2)$  finito. Por outro lado, esse termo faz com que a primeira derivada de  $\Delta(q^2)$  divirja em  $q^2 \rightarrow 0$ , pois

$$\begin{aligned}[\Delta^{-1}(q^2)]' &= [q^2 J(q^2)]' \\ &= c_2 \ln\left(\frac{q^2}{\mu^2}\right) + \left\{ 1 + c_1 \ln\left[\frac{(q^2 + m^2)}{\mu^2}\right] + \frac{c_1 q^2}{q^2 + m^2} + c_2 \right\}.\end{aligned}\quad (5.5)$$

A quantidade dentro das chaves na Eq. (5.5) é finita, mas seu sinal depende do momento  $q^2$ . Para  $q^2 > \mu^2$ , porém, ela é sempre positiva. Como o primeiro termo da equação fica cada vez mais negativo conforme  $q^2$  se aproxima de zero, existe um valor  $0 < q_\Delta^2 < \mu^2$  tal que  $[\Delta^{-1}(q_\Delta^2)]' = 0$ . É possível, ainda, mostrar que a segunda derivada é positiva,

$$[\Delta^{-1}(q_\Delta^2)]'' = \frac{c_1}{q_\Delta^2 + m^2} + \frac{c_1 m^2}{(q_\Delta^2 + m^2)^2} + \frac{c_2}{q_\Delta^2} > 0, \quad (5.6)$$

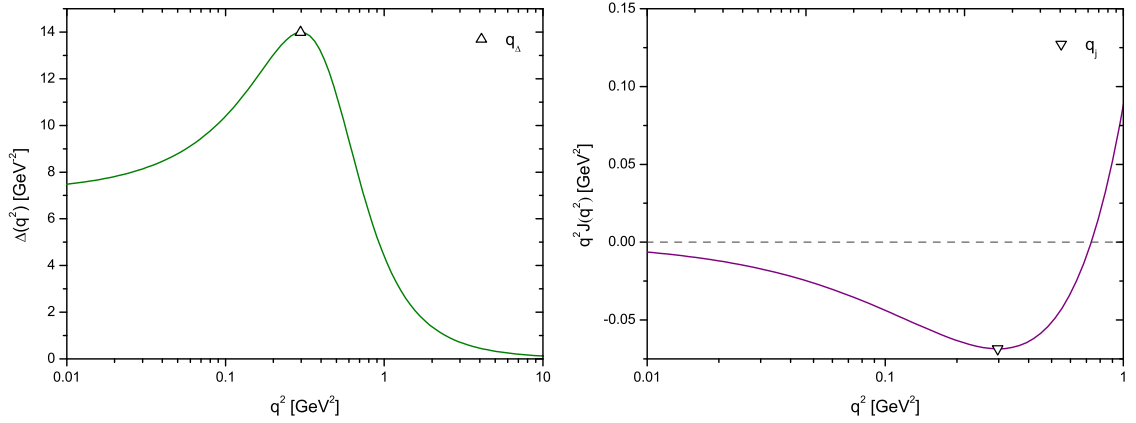


Figura 5.2: À esquerda: propagador do gluon no toy model; o triângulo marca a posição de  $q_\Delta^2 = 0.30 \text{ GeV}^2$ , onde ocorre o máximo  $\Delta^2(q_\Delta^2) = 13.99 \text{ GeV}^2$ . À direita: termo cinético do propagador de gluon no toy model; o triângulo invertido marca a posição de  $q_j^2 = 0.30 \text{ GeV}^2$ , onde ocorre o mínimo  $q_j^2 J(q_j^2) = -0.07 \text{ GeV}^2$ . Nos dois gráficos temos  $m^2 = 0.14 \text{ GeV}^2$ ,  $\mu^2 = 18.64 \text{ GeV}^2$  e  $\alpha_s = 0.63$ .

portanto, o inverso do propagador de gluon,  $\Delta^{-1}(q^2)$ , possui um mínimo. Dessa forma, o logaritmo não massivo do loop de ghost faz com que o propagador de gluon,  $\Delta(q^2)$ , possua um máximo em  $q_\Delta$ . Esse fato pode ser observado no painel da esquerda da Fig. 5.2, onde temos a simulação do propagador do gluon para  $m^2 = 0.14 \text{ GeV}^2$ ,  $\mu^2 = 18.64 \text{ GeV}^2$  e  $\alpha_s = 0.63$ .

Além disso, nota-se que o máximo do propagador corresponde a um mínimo do termo cinético no ponto  $q_j$ , pois da Eq. (5.2) temos que  $[\Delta^{-1}(q^2)]' = [q^2 J(q^2)]'$ . Todavia, a igualdade  $q_\Delta = q_j$  é válida somente porque a massa utilizada no toy model é constante, o mesmo não ocorrerá quando utilizarmos uma massa dependente do momento,  $m^2(q^2)$ , cuja derivada não é nula. Para o nosso toy model, então, o termo cinético é dado no painel da direita da Fig. 5.2, onde destacamos o ponto de mínimo  $q_j$ .

Outra consequência importante da presença desse logaritmo sem massa no termo cinético  $q^2 J(q^2)$  pode ser observado no comportamento IR de uma outra função de Green fundamental da QCD: o vértice de três gluons. Para estudar o vértice de três gluons em QCD na rede, em geral, utiliza-se o chamado projetor  $R$ , definido como [67, 68]

$$R(q, r, p) = \frac{\mathbf{N}(q, r, p)}{\mathbf{D}(q, r, p)}, \quad (5.7)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(q, r, p) &= \Gamma_{\alpha\mu\nu}^{(0)}(q, r, p) P^{\alpha\rho}(q) P^{\mu\sigma}(r) P^{\nu\tau}(p) \Gamma_{\rho\sigma\tau}(q, r, p), \\ \mathbf{D}(q, r, p) &= \Gamma_{\alpha\mu\nu}^{(0)}(q, r, p) P^{\alpha\rho}(q) P^{\mu\sigma}(r) P^{\nu\tau}(p) \Gamma_{\rho\sigma\tau}^{(0)}(q, r, p), \end{aligned} \quad (5.8)$$

sendo  $P^{\mu\nu}(q)$  o projetor transversal definido na Eq. (2.2). Do ponto de vista cinético,  $R$



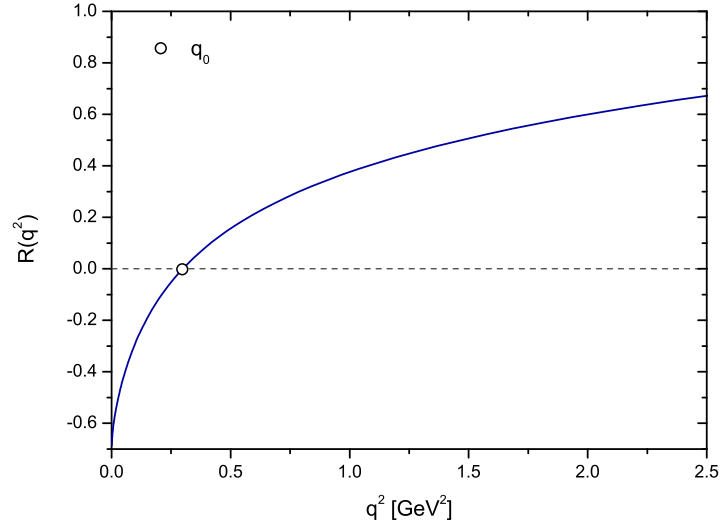


Figura 5.3: Projetor  $R$  do vértice de 3 glúons no toy model para  $m^2 = 0.14 \text{ GeV}^2$ ,  $\mu^2 = 18.64 \text{ GeV}^2$  e  $\alpha_s = 0.63$ . O círculo marca a posição de  $q_0^2 = 0.30 \text{ GeV}^2$ .

depende do módulo de dois momentos independentes ( $q$  e  $r$ ) e do ângulo  $\varphi$  entre eles. É comum analisar-se a configuração ortogonal ( $\varphi = \pi/2$ ) no limite em que um dos momentos vai a zero,  $r^2 \rightarrow 0$ . Então, foi demonstrado na Ref. [32] que nessa configuração  $R(q^2)$  pode ser qualitativamente modelado por

$$R(q^2) \sim [q^2 J(q^2)]'. \quad (5.9)$$

Logo, para  $q^2 \rightarrow 0$ , de acordo com o toy model, temos

$$R(q^2) \underset{q^2 \rightarrow 0}{\sim} \ln(q^2/\mu^2), \quad (5.10)$$

o que resulta em uma divergência logarítmica no IR.

Dessa forma, podemos definir um ponto  $q_0$  no qual  $R$  passa de valores positivos para negativos (conforme se aproxima de zero). O ponto onde essa mudança de sinal em  $R$  ocorre coincide exatamente com a localização do máximo de  $\Delta(q^2)$  para o toy model. Como já foi mencionado anteriormente, essa coincidência acontece somente porque utilizamos uma massa constante para o glúon na Eq. (5.2). Na análise não perturbativa completa, em que temos uma massa dependente do momento,  $q_\Delta \neq q_0$ .

A Fig. 5.3 revela o comportamento do projetor  $R$  no toy model aqui apresentado. O ponto  $q_0$  em que  $R$  cruza o zero está marcado por um círculo. Para os parâmetros aqui utilizados, temos  $q_\Delta = q_0 = q_j = 0.55 \text{ GeV}$ .

### 5.3 Análise não perturbativa completa

Apesar de até aqui termos descrito apenas os efeitos que ocorrem dentro do toy model, é possível realizar a análise não perturbativa completa, na qual consideramos a massa dinâmica do gluon,  $m^2(q^2)$ . Nesse caso, podemos escrever o termo cinético em função das contribuições  $\tilde{J}_g(q^2)$  dos loops de gluon - diagramas  $(a_1)$ ,  $(a_2)$ ,  $(a_5)$  e  $(a_6)$  da Fig. 2.5 - e  $\tilde{J}_c(q^2)$  dos loops ghost - diagramas  $(a_3)$  e  $(a_4)$ . Dessa forma,

$$\tilde{J}(q^2) = 1 + \tilde{J}_g(q^2) + \tilde{J}_c(q^2). \quad (5.11)$$

Como a relação com os termos cinéticos convencionais é dada por  $J_{g,c}(q^2) = F(q^2)\tilde{J}_{g,c}(q^2)$ , podemos escrever

$$J(q^2) = F(q^2) + J_g(q^2) + J_c(q^2), \quad (5.12)$$

onde  $J_g(q^2)$  possui um logaritmo cujo argumento contém um termo de massa que não permite que essa função divirja no IR, enquanto  $J_c(q^2)$  permanece não massivo. Assim, para a nossa análise em que  $q^2 \rightarrow 0$ , o mais importante é o comportamento de  $J_c(q^2)$ .

O termo cinético de ghost,  $J_c$ , é determinado através dos diagramas  $(a_3)$  e  $(a_4)$  da Fig. 3.5 ,

$$\begin{aligned} (a_3)_{\mu\nu} &= -g^2 C_A \int_k (k+q)_\mu D(k) D(k+q) \tilde{\Gamma}_\nu(k+q, -q, -k), \\ (a_4)_{\mu\nu} &= g^2 C_A g_{\mu\nu} \int_k D(k). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Como o vértice gluon-ghost  $\tilde{\Gamma}_\mu$  satisfaz a segunda identidade de Takahashi abeliana da Eq. (3.16), podemos introduzir um Ansatz que satisfaça automaticamente essa relação. Um Ansatz adequado é o vértice de Ball-Chiu [69], dado por

$$\tilde{\Gamma}_\mu(r, q, p) = \frac{(r-p)_\mu}{r^2 - p^2} [D^{-1}(r) - D^{-1}(p)] + A(r, p) [(r \cdot q)p_\mu - (p \cdot q)r_\mu], \quad (5.14)$$

onde definimos  $p = -q - r$ . Porém, sob hipóteses razoáveis no comportamento de  $A(r, p)$ , verifica-se que a parte transversa do vértice,  $A(r, p) [(r \cdot q)p_\mu - (p \cdot q)r_\mu]$ , é finita no IR e seu efeito pode ser negligenciado (Apêndice C). Assim, podemos utilizar somente a parte longitudinal, de forma que o nosso vértice é, então, dado por

$$\tilde{\Gamma}_\mu(r, q, p) = \frac{(r-p)_\mu}{r^2 - p^2} [D^{-1}(r) - D^{-1}(p)]. \quad (5.15)$$

Substituindo vértice da Eq. (5.15) na primeira equação de (5.13) e tomando o traço de ambos os lados, obtém-se

$$q^2 J_c(q^2) = C_d F(q^2) [4T(q^2) + q^2 S(q^2)], \quad (5.16)$$

onde  $C_d = g^2 C_A / [2(d-1)]$  e

$$T(q^2) = \int_k \frac{F(k+q) - F(k)}{(k+q)^2 - k^2} + \left(\frac{d}{2} - 1\right) \int_k \frac{F(k)}{k^2}, \quad (5.17)$$

$$S(q^2) = \int_k \frac{F(k)}{k^2(k+q)^2} - \int_k \frac{F(k+q) - F(k)}{k^2[(k+q)^2 - k^2]}. \quad (5.18)$$

O primeiro termo da Eq. (5.18) é divergente e lidera a contribuição para  $J_c(q^2)$  na região em que  $q^2 \rightarrow 0$  [32]. Assim, podemos escrever  $J_c$  como uma soma de contribuições,

$$J_c(q^2) = J_c^l(q^2) + J_c^{sl}(q^2), \quad (5.19)$$

sendo  $J_c^l(q^2)$  dado por

$$J_c^l(q^2) = C_d F(q^2) \int_k \frac{F(k)}{k^2(k+q)^2} \quad (5.20)$$

e  $J_c^{sl}$  a soma dos termos restantes.

Das Eqs. (5.12) e (5.19), temos

$$[q^2 J(q^2)]' = J_c^l(q^2) + \{F(q^2) + q^2 J'(q^2) + J^{sl}(q^2)\}, \quad (5.21)$$

onde  $J^{sl}(q^2)$  contém os termos  $J_g(q^2)$  (finito) e  $J_c^{sl}(q^2)$ . Assim como no toy model, a quantidade dentro das chaves é subdominante. Além disso, a derivada da Eq. (5.21) é positiva no UV e negativa no IR profundo, então, existe um ponto  $q_j$  em que

$$[q^2 J(q^2)]'_{q=q_j} = 0. \quad (5.22)$$

Dessa forma, a divergência de  $J_c(q^2)$  faz com que o termo cinético  $q^2 J(q^2)$  adquira um mínimo na região do IR (quando  $q = q_j$ ).

A localização do ponto  $q_j$ , porém, não pode ser determinada precisamente, pois não conhecemos todos os termos que aparecem entre as chaves da Eq. (5.21). Em particular, a dificuldade de fixar  $J(q^2)$  está em determinar a forma não perturbativa completa de  $\tilde{J}_g(q^2)$ , pois este termo envolve o cálculo de diagramas de dois loops vestidos (diagramas  $(a_5)$  e  $(a_6)$  da Fig. 2.5), que requerem a estrutura não perturbativa do vértice de quatro glúons, que é pouco conhecida. Entretanto,  $q^2 J(q^2)$  pode ser determinado indiretamente através da equação

$$q^2 J(q^2) = \Delta^{-1}(q^2) - m^2(q^2), \quad (5.23)$$

onde utilizaremos os resultados da rede para obter a forma de  $\Delta^{-1}(q^2)$  e os resultados obtidos através da equação da massa da Ref. [55].

Agora, derivando a equação acima em relação a  $q^2$ , podemos verificar a existência do

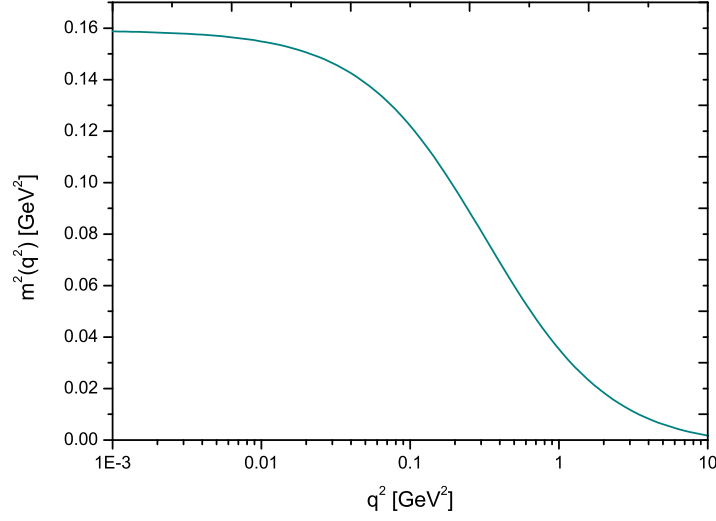


Figura 5.4: Solução da equação da massa dinâmica do gluon para o fit do propagador da rede em questão.

máximo do propagador de gluon,  $\Delta(q^2)$ , através da seguinte equação

$$[\Delta^{-1}(q^2)]' = [q^2 J(q^2)]' + [m^2(q^2)]'. \quad (5.24)$$

Sabemos, pela equação que governa a massa dinâmica do gluon,  $m^2(q^2)$ , obtida em [55], que a divergência IR de  $J_c^l(q^2)$  não é cancelada por uma divergência similar de  $[m^2(q^2)]'$ . Logo, existe um ponto  $q_\Delta$  no qual

$$[\Delta^{-1}(q_\Delta)]' = 0. \quad (5.25)$$

Na Fig. 5.4, temos a solução da massa dinâmica do gluon,  $m^2(q^2)$  [32]. Em  $d = 4$ , essa função  $m^2(q^2)$  é monotonicamente decrescente. Portanto, utilizando a Eq. (5.22) na Eq. (5.24), obtemos

$$[\Delta^{-1}(q_j^2)]' = [m^2(q_j^2)]' < 0. \quad (5.26)$$

Logo, em  $q_j$  a derivada de  $\Delta^{-1}(q^2)$  é negativa, o que nos leva a concluir que  $q_j < q_\Delta$ .

A Fig 5.5 revela os dados da rede para o propagador de gluon [6], juntamente com curva utilizada aqui para descrevê-los [32]. Nesse caso, obtemos o máximo do propagador de gluon em  $q_\Delta = 0.10 \text{ GeV}$ . Além disso, utilizando as curvas das Figs. 5.4 e 5.5, podemos obter o termo cinético do propagador dado pela Eq. (5.23) e revelado na Fig. 5.6. Assim, temos  $q_j = 0.09 \text{ GeV}$ , ou seja,  $q_j < q_\Delta$ , como esperado.

A análise não perturbativa completa prossegue para obter o projetor  $R$  na configuração ortogonal em que  $\varphi = \pi/2$  e  $r^2 \rightarrow 0$ . Como foi derivado em detalhes na Ref. [70], o limite

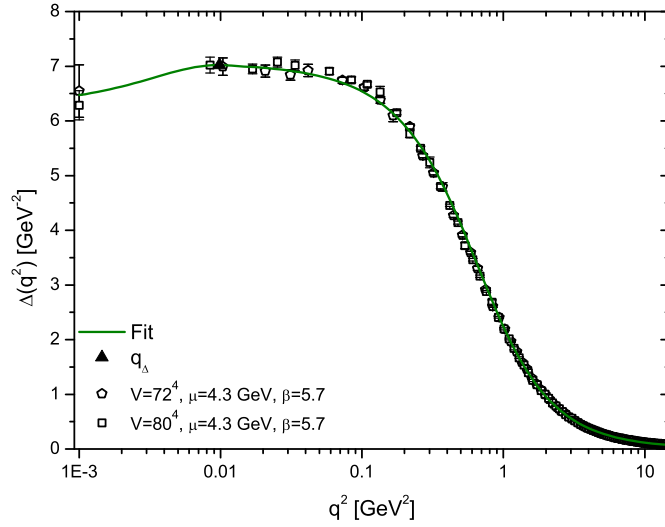


Figura 5.5: Dados da rede obtidos na Ref. [6] e fit correspondente para o propagador do gluon, com o ponto de máximo do propagador,  $q_\Delta$ , destacado.

de  $R$  pode ser obtido a partir da combinação

$$R(q^2, 0, \pi/2) = X_7(q^2, 0, \pi/2) + q^2 X_9(q^2, 0, \pi/2), \quad (5.27)$$

onde  $X_7$  e  $X_9$  representam dois dos dez fatores de forma que caracterizam a parte longitudinal do vértice de três gluons,

$$\begin{aligned} X_7(q, r, p) = & \frac{1}{4} \{ 2 [F(q^2)J(p^2)a_{rqp} + F(p^2)J(q^2)a_{rpq}] \\ & + r^2 [F(p^2)J(r^2)b_{qpr} + F(q^2)J(r^2)b_{pqr}] \\ & + (q^2 - p^2) [F(r^2)J(q^2)b_{prq} + F(q^2)J(p^2)b_{rqp} \\ & \quad - F(r^2)J(p^2)b_{qrp} - F(p^2)J(q^2)b_{rpq}] \\ & + 2(q \cdot r)F(p^2)J(q^2)d_{rpq} + 2(r \cdot p)F(q^2)J(p^2)d_{rqp} \}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$X_9(q, r, p) = \frac{F(r^2)}{q^2 - p^2} [J(q^2)a_{prq} - J(p^2)a_{qrp} + (r \cdot p)J(p^2)d_{qrp} - (q \cdot r)J(q^2)d_{prq}]. \quad (5.29)$$

Aqui  $a$ ,  $b$  e  $d$  representam os fatores de forma que aparecem na decomposição tensorial do kernel gluon-ghost  $H$  [71], apresentado anteriormente no diagrama da Fig. 2.3,

$$H_{\nu\mu}(p, r, q) = g_{\mu\nu}a_{qrp} - r_\mu q_\nu b_{qrp} + q_\mu p_\nu c_{qrp} + q_\nu p_\mu d_{qrp} + p_\mu p_\nu e_{qrp}, \quad (5.30)$$

onde utilizamos a notação compacta  $a_{qrp}$  para  $a(q, r, p)$  e notações equivalentes para os demais fatores de forma.

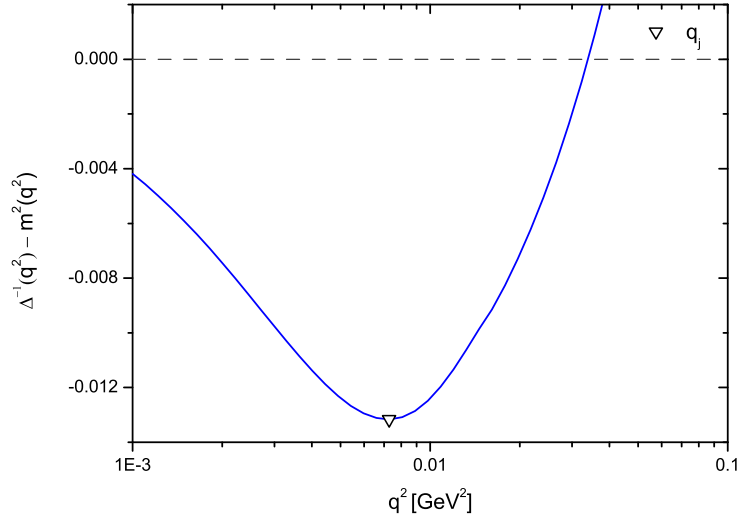


Figura 5.6: Termo cinético do propagador do gluon, com seu ponto de mínimo,  $q_j$ , destacado.

Como na configuração ortogonal temos

$$p^2 = q^2 + r^2; \quad (q \cdot r) = 0; \quad (q \cdot p) = -q^2; \quad (r \cdot p) = -r^2, \quad (5.31)$$

tomando o limite  $r^2 \rightarrow 0$ , o fator de forma  $X_7$  se resume a

$$X_7(q^2, 0, \pi/2) = F(q^2)J(q^2)a(0, q, -q). \quad (5.32)$$

Já para  $X_9$  na configuração ortogonal, obtemos

$$X_9(q^2, r^2, \pi/2) = F(r^2)J(p^2)d_{qrp} - \frac{F(r^2)}{r^2}[J(q^2)a_{prq} - J(p^2)a_{qrp}]. \quad (5.33)$$

O primeiro termo da equação pode ser simplificado utilizando a identidade [71]

$$F(r^2)[a_{qrp} - (q \cdot r)b_{qrp} + (q \cdot p)d_{qrp}] = F(q^2)[a_{rqp} - (q \cdot r)b_{rqp} + (p \cdot r)d_{rqp}], \quad (5.34)$$

que, no limite de interesse, nos fornece

$$q^2 F(0)d(q, 0, -q) = F(0) - F(q^2)a(0, q, -q), \quad (5.35)$$

onde utilizamos que, no gauge de Landau,  $a(q, 0, -q) = 1$  [72]. Para o segundo termo do lado direito da Eq. (5.33), é necessário realizar uma expansão de Taylor de  $a_{prq}$  e  $J(p^2)a_{qrp}$

em torno de  $r^2 = 0$ , de forma a obter

$$-\frac{F(r^2)}{r^2} [J(q^2)a_{prq} - J(p^2)a_{qrp}] \underset{r^2 \rightarrow 0}{=} F(0) \left[ J'(q^2) + J(q^2) \frac{\partial}{\partial r^2} (a_{qrp} - a_{prq}) \right]_{r^2=0}. \quad (5.36)$$

Assim, inserindo as Eqs. (5.35) e (5.36) na Eq. (5.33), encontra-se

$$q^2 X_9(q^2, 0, \pi/2) = J(q^2)[F(0) - F(q^2)a(0, q, -q)] + F(0)q^2 J'(q^2) + \mathcal{O}(q). \quad (5.37)$$

É possível, então, mostrar que

$$R(q^2) = F(0) [q^2 J(q^2)]' + R^{sl}(q^2), \quad (5.38)$$

onde  $R^{sl}(q^2)$  denota as correções finitas não contidas no primeiro termo. Assim, o comportamento de  $R(q^2)$  no IR profundo é determinado por  $J(q^2)$ ,

$$R(q^2) \underset{q^2 \rightarrow 0}{\sim} F(0)J(q^2). \quad (5.39)$$

Logo, da Eq. (5.20), temos que a contribuição dominante nesse limite é

$$R(q^2) \underset{q^2 \rightarrow 0}{\sim} C_d F^2(0) \int_k \frac{F(k)}{k^2(k+q)^2}. \quad (5.40)$$

Novamente, devido ao seu comportamento positivo no UV,  $R(q^2)$  deve ser nulo em um ponto  $q_0$  para eventualmente divergir no IR de acordo com a Eq. (5.40). A relação entre  $q_0$  e os pontos  $q_\Delta$  e  $q_j$ , porém, não pode ser determinada analiticamente devido a falta de conhecimento sobre a função  $R^{sl}$ . Vale a pena mencionar que recentemente dois grupos independentes encontraram em suas simulações de rede em SU(3) o ponto onde o projetor zera e começa a divergir no IR [73, 74].

Em resumo, a divergência causada pelos loops de ghost não altera a finitude do propagador de gluon no IR. Entretanto, a presença dessa divergência se manifesta pelo menos de três maneiras diferentes. Primeiramente o produto  $q^2 J(q^2)$  tem um mínimo, localizado no momento  $q_j$ . Segundo, o propagador completo do gluon  $\Delta(q^2)$  desenvolve um máximo localizado em um ponto denotado por  $q_\Delta$ . Por último, uma divergência (negativa) aparece em um certo limite cinemático do vértice de três gluons, onde o projetor da rede  $R(q^2)$  é proporcional a  $J(q^2)$ ; o ponto onde  $R(q^2)$  se anula é denotado por  $q_0$ .

## 5.4 Toy Model com Quarks

As estimativas obtidas nas seções anteriores foram realizadas para um teoria de Yang-Mills pura, ou seja, sem quarks. Como a origem desses efeitos está relacionada exclusivamente a presença dos loops de ghost não massivos, espera-se que adicionar quarks

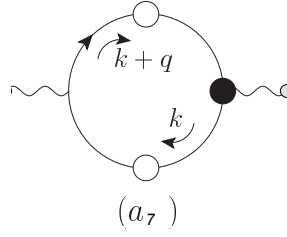


Figura 5.7: Diagrama que representa a contribuição do loop de quarks que deve ser adicionada à ESD do propagador de gluon dada pela Fig. 2.5

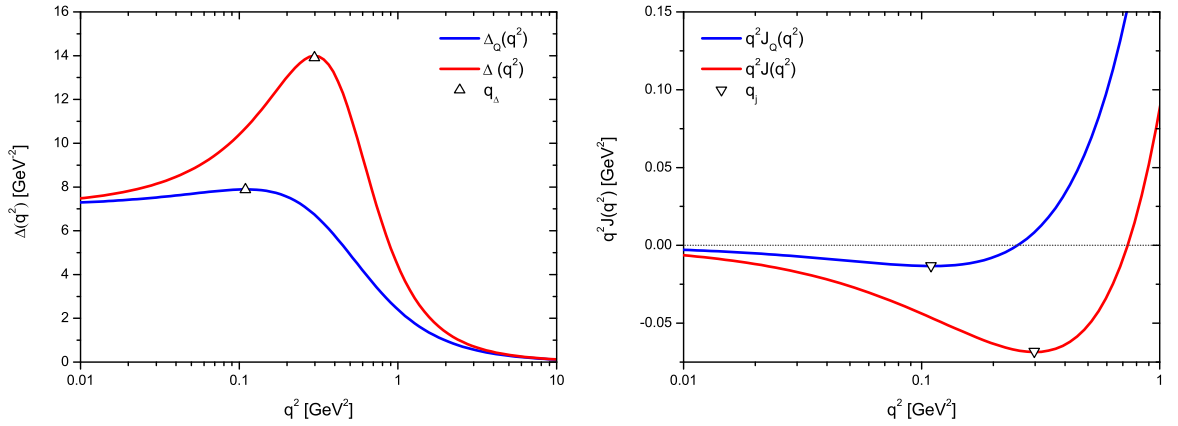


Figura 5.8: O propagador  $\Delta(q^2)$  e sua parte cinética  $q^2 J(q^2)$  em  $d = 4$  e  $SU(3)$  no Toy Model. Temos  $m^2 = 0.14 \text{ GeV}^2$ ,  $M^2 = 0.09 \text{ GeV}^2$ ,  $\mu^2 = 18.64 \text{ GeV}^2$ ,  $n_f = 2$  e  $\alpha_s = 0.63$ . A localização dos pontos  $q_\Delta$  e  $q_j$  está ressaltada nos gráficos.

não modifique os resultados qualitativamente, apenas quantitativamente. As técnicas desenvolvidas aqui são aplicadas diretamente ao caso unquenched (com efeitos de quarks) através da modificação

$$\Delta_Q^{-1}(q^2) - m_Q^2(q^2) = q^2(J_c + J_g + J_q), \quad (5.41)$$

onde  $q^2 J_q$  é o loop de quark (finito no IR) e  $\Delta_Q^{-1}(q^2)$  e  $m_Q^2(q^2)$  representam, respectivamente, o inverso do propagador e a massa dinâmica unquenched calculados em [75, 76].

O diagrama de quark que contribui para a ESD do propagador de gluon QB é dado na Fig. 5.7. Para determinar de que maneira a localização dos pontos  $q_j$ ,  $q_\Delta$  e  $q_0$  se modifica quando os campos de quarks estão ativos, devemos incluir este diagrama na ESD do propagador de gluon da Fig. 2.5.

Dentro do contexto de nosso toy model, podemos realizar essa análise unquenched incluindo o diagrama de um loop de quark e observar as diferenças em relação ao mesmo



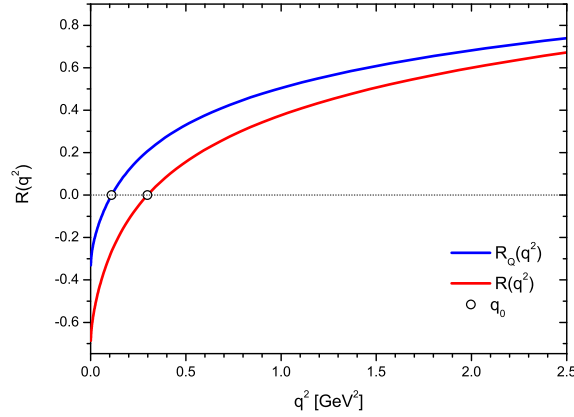


Figura 5.9: O projetor  $R(q^2)$  em  $d = 4$  e  $SU(3)$  no Toy Model. Temos  $m^2 = 0.14 \text{ GeV}^2$ ,  $M^2 = 0.09 \text{ GeV}^2$ ,  $\mu^2 = 18.64 \text{ GeV}^2$ ,  $n_f = 2$  e  $\alpha_s = 0.63$ . A localização do ponto  $q_0$  está marcada no gráfico por um círculo tanto para o caso quenched quanto unquenched.

modelo para Yang-Mills pura. Neste caso, temos que

$$\Delta_Q^{-1}(q^2) = q^2 [1 + c_1 J_{a_1}(q^2) + c_2 J_{a_3}(q^2) + c_3 J_{a_7}(q^2)] + m^2, \quad (5.42)$$

onde  $J_{a_1}$ ,  $J_{a_3}$  e  $J_{a_7}$  são os termos cinéticos dos diagramas que aparecem nas Figs. 2.5 e 5.7 calculados em nível de um-loop em teoria de perturbação. Nessa ordem de perturbação, temos que

$$J_{a_7} \sim \ln \left( \frac{q^2 + M^2}{\mu^2} \right), \quad (5.43)$$

onde  $M$  é a massa atribuída para o quark, nesse caso, uma massa dura (assim como a utilizada para o gluon no toy model). Além disso, sabemos que para 4 dimensões

$$c_3 = -\frac{4}{3} n_f \frac{\alpha_s}{8\pi}, \quad (5.44)$$

sendo  $n_f$  o número de quarks ativos da teoria.

Os efeitos dessa modificação no toy model encontram-se nas Figs. 5.8 e 5.9. Para comparação, plotou-se as curvas quenched (vermelha) e unquenched (azul) do propagador e sua parte cinética e do termo  $R(q^2)$ . Ressalta-se novamente que no toy model  $q_\Delta = q_j = q_0$ . Nota-se que esses pontos são levados mais para o IR ao adicionar o loop de quark na teoria. Ademais, o valor mínimo do termo cinético unquenched,  $q^2 J_Q(q^2)$ , é menos negativo do que o caso quenched,  $q^2 J(q^2)$ . Consequentemente, o pico de máximo do propagador  $\Delta_Q(q^2)$  é menor do que o de  $\Delta(q^2)$ . Isso ocorre porque nessa região o logaritmo  $\ln[(q^2 + M^2)/\mu^2]$  é negativo, logo  $c_3 J_{a_7}$  é positivo e, portanto, soma uma quantia positiva finita ao termo cinético.

# Capítulo 6

## Conclusões

Neste trabalho, estudamos os mecanismos de geração de massa dinâmica para o gluon. Nós apresentamos um formalismo unificado para o tratamento autoconsistente da finitude do propagador de gluon em nível das ESDs da teoria, formuladas dentro do esquema de PT-BFM. Dedicamos especial atenção aos cancelamentos extensivos induzidos pelas WIs obedecidas pelos vértices da teoria e à necessidade de introdução de polos nesses vértices para obter a massa dinâmica desejada. Essa análise geral foi feita sem fixação do parâmetro de gauge  $\xi$  e, portanto, indica a geração de massa dinâmica para o gluon independente do gauge covariante linear escolhido. Em particular, verificamos também que a presença desses polos também altera a expressão para os fatores de forma dos vértices.

Tais polos representam excitações de estado ligado não massivas e devem ser estudados dentro do contexto de BSE. Em trabalhos anteriores [62] isso foi feito considerando apenas a possibilidade de polo no vértice de três gluons. Aqui, expandimos esses cálculos adicionando polos no vértice gluon-ghost. Obtivemos, então, um sistema de equações integrais homogêneas acopladas, que ainda deve ser resolvido numericamente.

Adicionalmente, estudamos alguns efeitos da geração de massa dinâmica para o gluon aliada ao comportamento divergente do propagador de ghost, que permanece não massivo não perturbativamente. Logo, os loops de ghost contidos em algumas ESDs da QCD divergem no IR devido a massa nula do ghost. Tal divergência impacta pelo menos duas funções de Green dessa teoria, o propagador do gluon e o vértice de 3 gluons. Seus efeitos são a geração de um máximo no propagador do gluon,  $\Delta(q^2)$ , em  $q_\Delta$ , de um mínimo no termo cinético desse propagador,  $q^2 J(q^2)$ , em  $q_j$  e a existência de um ponto  $q_0$  em que o projetor  $R(q^2)$  cruza o zero, a partir de onde essa função começa a divergir negativamente no limite IR.

Os efeitos acima descritos foram calculados para uma teoria de Yang-Mills pura. Porém, como a origem desses está relacionada exclusivamente a presença dos loops não massivos de ghost, ao adicionar campos de quark, a diferença esperada é meramente

---

quantitativa, já que a inclusão de loops de quark não introduz nenhuma nova divergência que possa vir a cancelar a divergência do propagador de ghost. Tal fato foi verificado ao adicionar a aproximação de um loop (perturbativo) de quark ao toy model aqui utilizado. Nesse caso, o máximo no propagador de gluon, o mínimo no termo cinético do propagador e o ponto em que o projetor  $R$  cruza o zero continuaram existindo, mas passaram a ocorrer para um valor menor de  $q^2$  em relação ao caso quenched. A análise não perturbativa completa para o caso unquenched está em andamento e esperamos que em breve possamos divulgar nossos resultados.

## Referências Bibliográficas

- [1] Gross, D. J. & Wilczek, F. Ultraviolet behavior of non-Abelian gauge theories. *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1343–1346 (1973).
- [2] Politzer, H. D. Reliable perturbative results for strong interactions? *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1346–1349 (1973).
- [3] Olive, K. A. *et al.* Review of Particle Physics. *Chin. Phys.* **C38**, 090001 (2014).
- [4] Cucchieri, A. & Mendes, T. What’s up with IR gluon and ghost propagators in Landau gauge? A puzzling answer from huge lattices. *PoS LAT2007*, 297 (2007). 0710.0412.
- [5] Cucchieri, A. & Mendes, T. Numerical test of the Gribov-Zwanziger scenario in Landau gauge. *PoS QCD-TNT09*, 026 (2009). 1001.2584.
- [6] Bogolubsky, I., Ilgenfritz, E., Muller-Preussker, M. & Sternbeck, A. Lattice gluodynamics computation of Landau gauge Green’s functions in the deep infrared. *Phys. Lett.* **B676**, 69–73 (2009). 0901.0736.
- [7] Oliveira, O. & Silva, P. The Lattice infrared Landau gauge gluon propagator: The Infinite volume limit. *PoS LAT2009*, 226 (2009). 0910.2897.
- [8] Ayala, A., Bashir, A., Binosi, D., Cristoforetti, M. & Rodriguez-Quintero, J. Quark flavour effects on gluon and ghost propagators. *Phys. Rev.* **D86**, 074512 (2012). 1208.0795.
- [9] Cucchieri, A. & Mendes, T. Constraints on the IR behavior of the gluon propagator in Yang-Mills theories. *Phys.Rev.Lett.* **100**, 241601 (2008). 0712.3517.
- [10] Boucaud, P. *et al.* On the IR behaviour of the Landau-gauge ghost propagator. *JHEP* **06**, 099 (2008). 0803.2161.

- [11] Aguilar, A. C., Binosi, D. & Papavassiliou, J. Gluon and ghost propagators in the Landau gauge: Deriving lattice results from Schwinger-Dyson equations. *Phys. Rev. D* **78**, 025010 (2008). 0802.1870.
- [12] Rodriguez-Quintero, J. On the massive gluon propagator, the PT-BFM scheme and the low-momentum behaviour of decoupling and scaling DSE solutions. *JHEP* **1101**, 105 (2011). 1005.4598.
- [13] Alkofer, R. & von Smekal, L. The infrared behavior of QCD Green's functions: Confinement, dynamical symmetry breaking, and hadrons as relativistic bound states. *Phys. Rept.* **353**, 281 (2001). hep-ph/0007355.
- [14] Aguilar, A. C. & Natale, A. A. A dynamical gluon mass solution in a coupled system of the Schwinger-Dyson equations. *JHEP* **08**, 057 (2004). hep-ph/0408254.
- [15] Fischer, C. S. Infrared properties of QCD from Dyson-Schwinger equations. *J. Phys. G* **32**, R253–R291 (2006). hep-ph/0605173.
- [16] Binosi, D. & Papavassiliou, J. Gauge-invariant truncation scheme for the Schwinger-Dyson equations of QCD. *Phys. Rev. D* **77**, 061702 (2008). 0712.2707.
- [17] Binosi, D. & Papavassiliou, J. New Schwinger-Dyson equations for non-Abelian gauge theories. *JHEP* **0811**, 063 (2008). 0805.3994.
- [18] Cornwall, J. M. Dynamical Mass Generation in Continuum QCD. *Phys. Rev. D* **26**, 1453 (1982).
- [19] Wilson, K. G. Confinement of quarks. *Phys. Rev. D* **10**, 2445–2459 (1974).
- [20] Bjorken, J. & Drell, S. RELATIVISTIC QUANTUM FIELD THEORY. (GERMAN TRANSLATION) (1979).
- [21] Itzykson, C. & Zuber, J. B. *Quantum Field Theory*. International Series in Pure and Applied Physics (New York, USA: McGraw-Hill (1980) 705 p., 1980).
- [22] Roberts, C. D. & Williams, A. G. Dyson-Schwinger equations and their application to hadronic physics. *Prog. Part. Nucl. Phys.* **33**, 477–575 (1994). hep-ph/9403224.
- [23] Papavassiliou, J. & Cornwall, J. M. Coupled fermion gap and vertex equations for chiral symmetry breakdown in QCD. *Phys. Rev. D* **44**, 1285–1297 (1991).
- [24] Binosi, D. & Papavassiliou, J. Pinch Technique: Theory and Applications. *Phys. Rept.* **479**, 1–152 (2009). 0909.2536.
- [25] Binosi, D. & Papavassiliou, J. The pinch technique to all orders. *Phys. Rev. D* **66**, 111901(R) (2002). hep-ph/0208189.

- [26] Abbott, L. F. The Background Field Method Beyond One Loop. *Nucl. Phys.* **B185**, 189 (1981).
- [27] Aguilar, A. C. & Papavassiliou, J. Gluon mass generation in the PT-BFM scheme. *JHEP* **12**, 012 (2006). [hep-ph/0610040](#).
- [28] Cucchieri, A. & Mendes, T. Landau-gauge propagators in Yang-Mills theories at  $\beta = 0$ : Massive solution versus conformal scaling. *Phys.Rev.* **D81**, 016005 (2010). 0904.4033.
- [29] Bogolubsky, I. L., Ilgenfritz, E. M., Muller-Preussker, M. & Sternbeck, A. The Landau gauge gluon and ghost propagators in 4D SU(3) gluodynamics in large lattice volumes (2007). [arXiv:0710.1968 \[hep-lat\]](#).
- [30] Bowman, P. O. *et al.* Scaling behavior and positivity violation of the gluon propagator in full QCD. *Phys. Rev.* **D76**, 094505 (2007). [hep-lat/0703022](#).
- [31] Bicudo, P., Binosi, D., Cardoso, N., Oliveira, O. & Silva, P. J. Lattice gluon propagator in renormalizable  $\xi$  gauges. *Phys. Rev.* **D92**, 114514 (2015). 1505.05897.
- [32] Aguilar, A. C., Binosi, D., Ibañez, D. & Papavassiliou, J. Effects of divergent ghost loops on the Green's functions of QCD. *Phys. Rev.* **D89**, 085008 (2014). 1312.1212.
- [33] Peskin, M. E. & Schroeder, D. V. *An introduction to quantum field theory*. Advanced book program (Westview Press Reading (Mass.), Boulder (Colo.), 1995). URL <http://opac.inria.fr/record=b1131978>. Autre tirage : 1997.
- [34] Kaku, M. *Quantum field theory: A Modern introduction* (1993).
- [35] Papavassiliou, J. Unraveling the organization of the QCD tapestry. *J. Phys. Conf. Ser.* **631**, 012006 (2015). 1503.04212.
- [36] Faddeev, L. D. & Popov, V. N. Feynman diagrams for the Yang-Mills field. *Phys. Lett.* **B25**, 29–30 (1967).
- [37] Abbott, L. F. Introduction to the Background Field Method. *Acta Phys. Polon.* **B13**, 33 (1982).
- [38] Pascual, P. & Tarrach, R. QCD: Renormalization for the practitioner. *Lect. Notes Phys.* **194**, 1–277 (1984).
- [39] Cornwall, J. M. & Papavassiliou, J. Gauge Invariant Three Gluon Vertex in QCD. *Phys. Rev.* **D40**, 3474 (1989).
- [40] Binosi, D. & Papavassiliou, J. Pinch technique selfenergies and vertices to all orders in perturbation theory. *J.Phys.G* **G30**, 203 (2004). [hep-ph/0301096](#).

- [41] Grassi, P. A., Hurth, T. & Steinhauser, M. Practical algebraic renormalization. *Annals Phys.* **288**, 197–248 (2001). [hep-ph/9907426](#).
- [42] Binosi, D. & Papavassiliou, J. Pinch technique and the Batalin-Vilkovisky formalism. *Phys.Rev.* **D66**, 025024 (2002). [hep-ph/0204128](#).
- [43] Aguilar, A., Binosi, D. & Papavassiliou, J. Indirect determination of the Kugo-Ojima function from lattice data. *JHEP* **0911**, 066 (2009). [0907.0153](#).
- [44] Grassi, P. A., Hurth, T. & Quadri, A. On the Landau background gauge fixing and the IR properties of YM Green functions. *Phys. Rev.* **D70**, 105014 (2004). [hep-th/0405104](#).
- [45] Aguilar, A. C., Binosi, D., Papavassiliou, J. & Rodriguez-Quintero, J. Non-perturbative comparison of QCD effective charges. *Phys. Rev.* **D80**, 085018 (2009). [0906.2633](#).
- [46] Aguilar, A. C., Binosi, D. & Papavassiliou, J. QCD effective charges from lattice data. *JHEP* **1007**, 002 (2010). [1004.1105](#).
- [47] Aguilar, A. C., Binosi, D. & Papavassiliou, J. The Gluon Mass Generation Mechanism: A Concise Primer. *Front. Phys.(Beijing)* **11**, 111203 (2016). [1511.08361](#).
- [48] Aguilar, A. C., Binosi, D., Figueiredo, C. T. & Papavassiliou, J. Unified description of seagull cancellations and infrared finiteness of gluon propagators (2016). [1604.08456](#).
- [49] Bernard, C. W. Adjoint Wilson lines and the effective gluon mass. *Nucl. Phys.* **B219**, 341 (1983).
- [50] Donoghue, J. F. THE GLUON 'MASS' IN THE BAG MODEL. *Phys. Rev.* **D29**, 2559 (1984).
- [51] Halzen, F., Krein, G. I. & Natale, A. A. Relating the QCD pomeron to an effective gluon mass. *Phys. Rev.* **D47**, 295–298 (1993).
- [52] Aguilar, A. C., Mihara, A. & Natale, A. A. Freezing of the QCD coupling constant and solutions of Schwinger-Dyson equations. *Phys. Rev.* **D65**, 054011 (2002). [hep-ph/0109223](#).
- [53] Luna, E. G. S., Martini, A. F., Menon, M. J., Mihara, A. & Natale, A. A. Influence of a dynamical gluon mass in the p p and anti-p p forward scattering. *Phys. Rev.* **D72**, 034019 (2005). [hep-ph/0507057](#).
- [54] Aguilar, A. C., Binosi, D. & Papavassiliou, J. The dynamical equation of the effective gluon mass. *Phys. Rev.* **D84**, 085026 (2011). [1107.3968](#).

- [55] Binosi, D., Ibañez, D. & Papavassiliou, J. The all-order equation of the effective gluon mass. *Phys. Rev.* **D86**, 085033 (2012). 1208.1451.
- [56] Schwinger, J. S. Gauge Invariance and Mass. *Phys. Rev.* **125**, 397–398 (1962).
- [57] Schwinger, J. S. Gauge Invariance and Mass. 2. *Phys. Rev.* **128**, 2425–2429 (1962).
- [58] Aguilar, A. C. & Papavassiliou, J. Gluon mass generation without seagull divergences. *Phys.Rev.* **D81**, 034003 (2010). 0910.4142.
- [59] Binosi, D. & Quadri, A. AntiBRST symmetry and Background Field Method. *Phys.Rev.* **D88**, 085036 (2013). 1309.1021.
- [60] Aguilar, A., Binosi, D. & Papavassiliou, J. Yang-Mills two-point functions in linear covariant gauges. *Phys.Rev.* **D91**, 085014 (2015). 1501.07150.
- [61] Huber, M. Q. Gluon and ghost propagators in linear covariant gauges. *Phys.Rev.* **D91**, 085018 (2015). 1502.04057.
- [62] Aguilar, A., Ibanez, D., Mathieu, V. & Papavassiliou, J. Massless bound-state excitations and the Schwinger mechanism in QCD. *Phys.Rev.* **D85**, 014018 (2012). 1110.2633.
- [63] Jackiw, R. Dynamical Symmetry Breaking. In *\*Erice 1973, Proceedings, Laws Of Hadronic Matter\**, New York 1975, 225-251 and M I T Cambridge - COO-3069-190 (73,REC.AUG 74) 23p (1973).
- [64] Poggio, E. C., Tomboulis, E. & Tye, S. H. H. Dynamical Symmetry Breaking in Nonabelian Field Theories. *Phys. Rev.* **D11**, 2839 (1975).
- [65] Aguilar, A. C., Ibañez, D. & Papavassiliou, J. Ghost propagator and ghost-gluon vertex from Schwinger-Dyson equations. *Phys. Rev.* **D87**, 114020 (2013). 1303.3609.
- [66] Boucaud, P. *et al.* Ghost-gluon running coupling, power corrections and the determination of  $\Lambda(\overline{\text{MS}})$ . *Phys.Rev.* **D79**, 014508 (2009). 0811.2059.
- [67] Cucchieri, A., Maas, A. & Mendes, T. Exploratory study of three-point Green's functions in Landau-gauge Yang-Mills theory. *Phys.Rev.* **D74**, 014503 (2006). hep-lat/0605011.
- [68] Cucchieri, A., Maas, A. & Mendes, T. Three-point vertices in Landau-gauge Yang-Mills theory. *Phys.Rev.* **D77**, 094510 (2008). 0803.1798.
- [69] Ball, J. S. & Chiu, T.-W. Analytic Properties of the Vertex Function in Gauge Theories. 1. *Phys.Rev.* **D22**, 2542 (1980).



- 
- [70] Binosi, D., Ibanez, D. & Papavassiliou, J. QCD effective charge from the three-gluon vertex of the background-field method. *Phys.Rev.* **D87**, 125026 (2013). 1304.2594.
  - [71] Binosi, D. & Papavassiliou, J. Gauge invariant Ansatz for a special three-gluon vertex. *JHEP* **1103**, 121 (2011). 1102.5662.
  - [72] Ibañez, D. & Papavassiliou, J. Gluon mass generation in the massless bound-state formalism. *Phys.Rev.* **D87**, 034008 (2013). 1211.5314.
  - [73] Athenodorou, A. *et al.* On the zero crossing of the three-gluon vertex (2016). 1607.01278.
  - [74] Duarte, A. G., Oliveira, O. & Silva, P. J. Further Evidence For Zero Crossing On The Three Gluon Vertex (2016). 1607.03831.
  - [75] Aguilar, A. C., Binosi, D. & Papavassiliou, J. Unquenching the gluon propagator with Schwinger-Dyson equations. *Phys. Rev.* **D86**, 014032 (2012). 1204.3868.
  - [76] Aguilar, A. C., Binosi, D. & Papavassiliou, J. Gluon mass generation in the presence of dynamical quarks. *Phys. Rev.* **D88**, 074010 (2013). 1304.5936.

# Apêndice

# A

## ESD para o propagador de gluon

Neste apêndice, apresentaremos os passos para a derivação da ESD do propagador de gluon na QCD. Começamos com a Lagrangiana renormalizada da QCD, obtida pela aplicação das regras de (1.49) na Eq. (1.1),

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{QCD} = & Z_Q \frac{1}{2} A_a^\mu \left( \partial^2 g_{\mu\nu} + \left( \frac{1}{Z_Q \xi} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu \right) A_a^\nu \\
& - Z_c \bar{c}^a \partial^2 c^a - Z_1 g f^{abc} \bar{c}^a \partial_\mu (A_b^\mu c^c) - Z_3 g f^{abc} (\partial_\mu A_\mu^a) A_b^\mu A_c^\nu \\
& - Z_4 \frac{1}{4} g^2 f^{abe} f^{cde} A_a^\mu A_b^\nu A_\mu^c A_\nu^d + Z_2 \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - Z_m m) \psi + Z_{1F} g \bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} \psi A_a^\mu,
\end{aligned} \tag{A.1}$$

onde  $Z_{1F}$  é a constante de renormalização do vértice quark-gluon,

$$\Gamma_{q,R}^\mu = Z_{1F} \Gamma_q^\mu. \tag{A.2}$$

Ademais, foram utilizadas as seguintes relações:

$$Z_{1F} = Z_g Z_2 Z_Q^{1/2}; \quad Z_3 = Z_g Z_Q^{3/2}; \quad Z_1 = Z_g Z_c Z_Q^{1/2}; \quad Z_4 = Z_g^2 Z_Q^2, \tag{A.3}$$

que são resultantes das STIs da QCD.

Para obter a ESD do propagador de gluon, precisamos derivar a ação em relação ao campo  $A^\mu$  duas vezes, como no caso do propagador de fóton. Para simplificação das expressões daqui por diante, definimos

$$\int \mathcal{D}[\phi] i \left[ \frac{\delta S}{\delta \phi} + J \right] \exp \left\{ i \left( S(\phi) + \int dx J \phi \right) \right\} =: \left\langle \left( \frac{\delta S}{\delta \phi} + J \right) \right\rangle. \tag{A.4}$$

Conforme a Eq. (1.29), a expressão acima é igual a zero, de forma que

$$\left\langle \left( \frac{\delta S_{QCD}}{\delta A_\mu(x)} + J_\mu \right) \right\rangle = 0. \tag{A.5}$$

Além disso, sabemos que o campo de gluon,  $A_\mu$ , pode ser substituído por uma derivada em relação à corrente  $J_\mu$ . Assim, realizando uma derivada adicional  $\delta/\delta J_\nu(y)$ , temos o resultado

$$\left\langle \left( \frac{\delta S_{QCD}}{\delta A_\mu^a(x)} A_\nu^b(y) \right) \right\rangle = -\delta^{ab} g_{\mu\nu} \delta^4(x-y). \quad (\text{A.6})$$

A partir da Eq. (A.1), obtemos a ação  $S_{QCD}$  e podemos calcular o lado esquerdo da equação acima,

$$\begin{aligned} \left\langle \left( \frac{\delta S_{QCD}}{\delta A_\mu^a(x)} A_\nu^b(y) \right) \right\rangle &= Z_Q \left( \partial^2 g_{\mu\rho} + \left( \frac{1}{Z_Q \xi} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\rho \right) \langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle \\ &+ Z_1 g f^{ade} \langle (\partial_\mu \bar{c}^d(x)) c^e(x) A_\nu^b(y) \rangle + Z_{1F} g \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} \langle \bar{\psi}(x) \psi(x) A_\nu^b(y) \rangle \\ &+ Z_3 g f^{ade} \{ (\partial_\mu A^d(x)) A_\mu^e(x) + (\partial_\mu A_\rho^d(x)) A_\rho^e(x) \\ &\quad - 2(\partial_\rho A_\mu^d(x)) A_\rho^e(x) \} A_\nu^b(y) \rangle \\ &- Z_4 g^2 f^{ack} f^{dek} \langle A_\mu^a(x) A_\rho^c(x) A_\rho^e(x) A_\nu^b(y) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Contudo, é mais interessante olhar para a equação que envolve o gerador de diagramas próprios,  $\Gamma_{QCD}$ , pois

$$(\Delta^{-1})_{\mu\nu}^{ab} = \frac{\delta^2 \Gamma_{QCD}}{\delta A_\mu^a \delta A_\nu^b}. \quad (\text{A.8})$$

É possível, então, verificar que

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \Gamma_{QCD}}{\delta A_\mu^a \delta A_\nu^b} &= Z_Q \left[ \partial^2 g_{\mu\rho} - \left( 1 - \frac{1}{Z_Q \xi} \right) \partial_\mu \partial_\nu \right] \delta^{ab} \delta(x-y) \\ &+ Z_1 g f^{ade} \int d^4 z \langle A_\nu^b(y) A_\rho^c(z) \rangle^{-1} \langle (\partial_\mu \bar{c}^d(x)) c^e(x) A_\rho^c(z) \rangle_{cn} \\ &+ Z_{1F} g \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} \int d^4 z \langle A_\nu^b(y) A_\rho^c(z) \rangle^{-1} \langle \bar{\psi}(x) \psi(x) A_\rho^c(z) \rangle_{cn} \\ &+ Z_3 g f^{ade} \int d^4 z \langle A_\nu^b(y) A_\rho^c(z) \rangle^{-1} \{ -\langle A_\rho^c(z) A_\mu^d(x) \partial_\mu A_\sigma^e(x) \rangle \\ &\quad + \langle A_\rho^c(z) A_\mu^d(x) \partial_\sigma A_\mu^e(x) \rangle + \langle A_\rho^c(z) \partial_\sigma A_\mu^d(x) A_\mu^e(x) \rangle \} \\ &+ Z_4 g^2 f^{afg} f^{gde} \{ \delta^{bf} \langle A_\mu^d(x) A_\nu^e(x) \rangle + \delta^{be} \langle A_\nu^f(x) A_\mu^d(x) \rangle \\ &\quad + \delta^{bd} g_{\mu\nu} \langle A_\rho^f(x) A_\rho^e(x) \rangle \} \delta(x-y) \\ &+ Z_4 g^2 f^{afg} f^{gde} \int d^4 z \langle A_\nu^b(y) A_\rho^c(z) \rangle^{-1} \langle A_\rho^c(z) A_\mu^d(x) A_\mu^f(x) A_\sigma^e(x) \rangle_{cn}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

onde utilizamos a identidade funcional

$$\frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} = \int d^4 z \frac{\delta J_\mu^a(z)}{\delta A_\mu^a(x)} \frac{\delta}{\delta J_\mu^a(z)} = - \int d^4 z \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A_\mu^a(x) \delta A_\nu^b(x)} \frac{\delta}{\delta J_\mu^a(z)}. \quad (\text{A.10})$$

Além disso, o subscrito  $cn$  que aparece na Eq. (A.9) representa a correlação somente de

diagramas conectados, por exemplo,

$$\langle c^c(z) \bar{c}^b(y) A_\mu^a(x) \rangle_{cn} := \frac{\delta^3 W[J, \bar{\sigma}, \sigma]}{\delta \sigma^b(y) \delta \bar{\sigma}^c(z) \delta J_\mu^a(x)} \Big|_{\bar{\sigma}=\sigma=J=0}, \quad (\text{A.11})$$

sendo  $\bar{\sigma}$  e  $\sigma$  as fontes correspondentes aos campos de ghost  $c$  e  $\bar{c}$ , respectivamente. Tal correlação ghost-gluon de três pontos pode ser decomposta na função de vértice ghost-gluon (incluindo somente diagramas próprios),

$$g\Gamma_\mu^{abc}(x, y, z) = \frac{\delta^3 \Gamma_{QCD}[A, \bar{c}, c]}{\delta c^c(z) \delta \bar{c}^b(y) \delta A_\mu^a(x)} \Big|_{c=\bar{c}=A=0}, \quad (\text{A.12})$$

e deve possuir propagadores de ghost,  $D^{ab}$ , e gluon,  $\Delta_{\mu\nu}^{ab}$ , conectados às pernas. No formalismo covariante, funções de três pontos conectadas e completas são equivalentes, de forma que

$$\begin{aligned} \langle c^c(z) \bar{c}^b(y) A_\mu^a(x) \rangle &= \langle c^c(z) \bar{c}^b(y) A_\mu^a(x) \rangle_{cn} \\ &= g \int d^4 u d^4 v d^4 w \Delta_{\mu\nu}^{ad}(x-u) D^{ce}(z-v) \Gamma_\nu^{def}(u, v, w) D^{fb}(w-y), \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

O mesmo ocorre para as demais funções de correlação. Assim, pode-se obter a ESD para o propagador de gluon resultante,

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}^{-1}(x-y) &= Z_Q [\Delta^{(0)}]_{\mu\nu}^{-1}(x-y) \\ &+ Z_1 \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 y_1 d^4 y_2 \Gamma_\mu^{(0)}(x, x_1, x_2) D(x_2 - y_1) D(y_2 - x_1) \Gamma_\nu(y, y_1, y_2) \\ &+ Z_{1F} \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 y_1 d^4 y_2 \Gamma_{q,\mu}^{(0)}(x, x_1, x_2) S(x_2 - y_1) S(y_2 - x_1) \Gamma_\nu(y, y_1, y_2) \\ &+ Z_3 \frac{1}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 y_1 d^4 y_2 \\ &\quad \times \Gamma_{\mu\alpha\beta}^{(0)}(x, x_1, x_2) \Delta^{\beta\gamma}(x_2 - y_1) \Delta^{\alpha\delta}(x_1 - y_2) \Gamma_{\nu\gamma\delta}(y, y_1, y_2) \\ &+ Z_4 \frac{1}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 \Gamma_{\mu\nu\alpha\beta}^{(0)}(x, y, x_1, x_2) \Delta^{\alpha\beta}(x_1 - x_2) \\ &+ Z_4 \frac{1}{6} \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 y_3 \Gamma_{\mu\alpha\beta\gamma}^{(0)}(x, x_1, x_2, x_3) \\ &\quad \times \Delta^{\alpha\lambda}(x_1 - y_3) \Delta^{\beta\sigma}(x_2 - y_2) \Delta^{\gamma\rho}(x_3 - y_1) \Gamma_{\nu\rho\sigma\lambda}(y, y_1, y_2, y_3) \\ &+ Z_4 \frac{1}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 y_3 d^4 z_1 d^4 z_2 \Gamma_{\mu\alpha\beta\gamma}^{(0)}(x, x_1, x_2, x_3) \\ &\quad \times \Delta^{\alpha\rho}(x_1 - y_1) \Delta^{\beta\lambda}(x_2 - y_3) \Gamma_{\rho\sigma\lambda}(y_1, y_2, y_3) \Delta^{\sigma\kappa}(y_2 - z_2) \\ &\quad \times \Delta^{\gamma\delta}(x_3 - z_1) \Gamma_{\nu\delta\kappa}(y, z_1, z_2) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

onde omitimos os índices de cor.

Finalmente, utiliza-se a transformada de Fourier para obter a equação no espaço de

momentos. O resultado encontra-se na Eq. (1.50), onde negligenciamos o termo proporcional a  $Z_{1F}$  (aproximação *quenched*) e extraímos a constante de acoplamento  $g$  das definições de vértice para maior destaque.

# Apêndice B

## Vértices de PT-BFM

As seguintes definições de vértice foram empregadas no Capítulo 3, onde utilizamos a convenção em que todos os momentos do vértice em questão estão entrando:

$$\begin{aligned}
 i\Gamma_{Q_\mu^a Q_\alpha^m Q_\beta^n}(q, r, p) &= gf^{amn}\Gamma_{\mu\alpha\beta}(q, r, p); & i\Gamma_{B_\mu^a Q_\alpha^m Q_\beta^n}(q, r, p) &= gf^{amn}\tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta}(q, r, p), \\
 i\Gamma_{c^n Q_\mu^a \bar{c}^m}(p, q, r) &= gf^{amn}\Gamma_\mu(q, r, p); & i\Gamma_{c^n B_\mu^a \bar{c}^m}(p, q, r) &= gf^{amn}\tilde{\Gamma}_\mu(q, r, p); \\
 \Gamma_{Q_\mu^a Q_\alpha^m Q_\beta^n Q_\gamma^r}(q, r, p, t) &= -ig^2\Gamma_{\mu\alpha\beta\gamma}^{amnr}(q, r, p, t); & \Gamma_{B_\mu^a Q_\alpha^m Q_\beta^n Q_\gamma^r}(q, r, p, t) &= -ig^2\tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta\gamma}^{amnr}(q, r, p, t).
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Em nível de árvore temos,

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\mu\alpha\beta}^{(0)}(q, r, p) &= g_{\alpha\beta}(r-p)_\mu + g_{\mu\beta}(p-q)_\alpha + g_{\mu\alpha}(q-r)_\beta, \\
 \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta}^{(0)}(q, r, p) &= g_{\alpha\beta}(r-p)_\mu + g_{\mu\beta}(p-q+\xi^{-1}r)_\alpha + g_{\mu\alpha}(q-r-\xi^{-1}p)_\beta, \\
 \Gamma_\mu^{(0)}(q, r, p) &= -r_\mu, \\
 \tilde{\Gamma}_\mu^{(0)}(q, r, p) &= (p-r)_\mu, \\
 \Gamma_{\mu\alpha\beta\gamma}^{(0) amnr}(q, r, p, t) &= f^{are} f^{enm}(g_{\mu\beta}g_{\alpha\gamma} - g_{\mu\alpha}g_{\beta\gamma}) + f^{ame} f^{ern}(g_{\mu\gamma}g_{\alpha\beta} - g_{\mu\beta}g_{\alpha\gamma}) \\
 &\quad + f^{ane} f^{erm}(g_{\mu\gamma}g_{\alpha\beta} - g_{\mu\alpha}g_{\beta\gamma}), \\
 \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta\gamma}^{(0) amnr}(q, r, p, t) &= \Gamma_{\mu\alpha\beta\gamma}^{(0) amnr}(q, r, p, t).
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

## Apêndice C

### Parte transversa do vértice $\tilde{\Gamma}_\mu$

A contribuição da parte transversa de  $\tilde{\Gamma}_\mu$  para o termo cinético  $J_c(q^2)$ , denotada como  $J_c^t(q^2)$ , é dada por

$$q^2 J_c^t(q^2) \sim \int_k k^\mu D(k) D(k+q) \{ (k \cdot q)(k+q)_\mu - [(k+q) \cdot q] k_\mu \} A(k, k+q) \quad (\text{C.1})$$

$$\sim \int_k D(k) D(k+q) A(k, k+q) [(k \cdot q)^2 - q^2 k^2], \quad (\text{C.2})$$

a menos de constantes e a função de dressing do ghost  $F(q^2)$  (finita no IR). Passando para coordenadas esféricas e usando que  $(k \cdot q)^2 = q^2 k^2 \cos^2 \theta$ , obtemos

$$J_c^t(q^2) \sim \int_k D(k) D(k+q) A(k, k+q) k^2 \sin^2 \theta. \quad (\text{C.3})$$

Então, fazendo  $k^2 = y$  e lembrando que  $D(k^2) = F(k^2)/k^2$ , temos em  $q = 0$ ,

$$J_c^t(0) \sim \int_0^\infty dy F^2(y) A(y). \quad (\text{C.4})$$

Assim, se assumirmos que no IR profundo,  $A(y) \sim y^a$ , então, o limite inferior dessa integral é finito desde que  $a > -1$ , lembrando que  $F(y)$  satura para um valor constante no IR. Em outras palavras, a parte transversa do vértice gera uma contribuição finita (portanto subdominante) para  $J_c(q^2)$ , desde que  $A(y)$  divirja mais fracamente do que um polo simples. Tal condição aparenta ser relativamente fácil de ser satisfeita, especialmente devido ao fato de que a representação diagramática de  $\tilde{\Gamma}_\mu$  não inclui um loop de ghost em primeira ordem [32].